



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**  
**ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**  
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS  
CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

**DISEÑO SIMPLIFICADO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL  
ALA DE UNA AERONAVE COMERCIAL**

**PROYECTO FIN DE CARRERA**  
**INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL MECÁNICA**

**Autor:** Álvaro Rodríguez Ortiz

**Tutor:** Carlos Santiuste Romero

Diciembre 2014

## ***Agradecimientos***

A mis padres y hermano por el apoyo, paciencia y comprensión incondicionales que han tenido a lo largo de todo este tiempo.

A mi novia Irene por todo el ánimo, el apoyo y la ayuda brindada de forma incondicional desde que la conozco sin importar las circunstancias.

A mis amigos Jorge, Victor, Juan, Fernando, Jose, Dani y Raquel por ayudarme en todo momento, estar cuando se les hacía falta y no perder la fe en mí.

A mi tutor Carlos Santiuste por su actitud siempre positiva, una disponibilidad absoluta y por supuesto su guía y conocimientos sin los cuales no hubiera sido posible la realización de este proyecto.

# ÍNDICE

|  |    |
|--|----|
| 1. INTRODUCCIÓN                            | 10 |
| 1.1. MOTIVACIÓN                            | 10 |
| 1.2. OBJETIVO                              | 15 |
| 1.3. RESUMEN                               | 16 |
| 2. ANTECEDENTES                            | 17 |
| 2.1. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)     | 17 |
| 2.2. ALAS                                  | 20 |
| 2.2.1.FUNCIONES DEL ALA                    | 20 |
| 2.2.2.PARTES GEOMÉTRICAS MÓVILES DEL ALA   | 21 |
| 2.2.3.PERFIL NACA                          | 23 |
| 2.3. TEORÍA DE VIGAS DE PARED DELGADA      | 27 |
| 3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA              | 30 |
| 3.1. DIMENSIONES Y FORMA                   | 31 |
| 3.2. CARGA APLICADA                        | 34 |
| 3.3. MODELOS MEF                           | 38 |
| 4. MODELOS SIMPLIFICADOS                   | 39 |
| 4.1. MODELO 1                              | 40 |
| 4.1.1.CÁLCULO DEL ESPESOR                  | 40 |
| 4.1.2.FLECHA Y TENSIÓN NORMAL              | 41 |
| 4.1.3.CORTANTES                            | 45 |
| 4.1.4.DISCUSIÓN DE RESULTADOS DEL MODELO 1 | 52 |
| 4.2. MODELO 2                              | 53 |
| 4.2.1.CÁLCULO DEL ESPESOR                  | 53 |
| 4.2.2.FLECHA Y TENSIÓN NORMAL              | 54 |
| 4.2.3.CORTANTES                            | 58 |
| 4.2.4.DISCUSIÓN DE RESULTADOS DEL MODELO 2 | 66 |
| 4.3. MODELO 3                              | 67 |
| 4.3.1.CÁLCULO DEL ESPESOR                  | 67 |
| 4.3.2.FLECHA Y TENSIÓN NORMAL              | 68 |
| 4.3.3.CORTANTES                            | 71 |
| 4.3.4.DISCUSIÓN DE RESULTADOS DEL MODELO 3 | 86 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.4. MODELO 4   | 87  |
| 4.4.1.CÁLCULO DEL ESPESOR                             | 87  |
| 4.4.2.FLECHA Y TENSIÓN NORMAL                         | 88  |
| 4.4.3.CORTANTES                                       | 91  |
| 4.4.4.DISCUSIÓN DE RESULTADOS DEL MODELO 4            | 110 |
| 4.5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS                          | 111 |
| 5. MODELOS EN DETALLE                                 | 113 |
| 5.1. ESPECIFICACIONES GEOMÉTRICAS                     | 113 |
| 5.2. DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES                        | 120 |
| 5.2.1.MODELO CFD DEL PERFIL NACA 2415                 | 120 |
| 5.2.2.CARACTERIZACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES | 124 |
| 5.3. RESULTADOS                                       | 137 |
| 5.3.1.MODELO 5  | 137 |
| 5.3.2.MODELO 6  | 141 |
| 5.3.3.DISCUSIÓN DE RESULTADOS                         | 146 |
| 6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS                    | 147 |
| 6.1. CONCLUSIONES                                     | 147 |
| 6.2. TRABAJOS FUTUROS                                 | 149 |
| 7. REFERENCIAS  | 150 |



## **LISTA DE TABLAS**

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 4.1. Datos del modelo 1               | 52  |
| 4.2. Datos del modelo 2               | 66  |
| 4.3. Datos del modelo 3               | 86  |
| 4.4. Datos del modelo 4               | 110 |
| 4.5. Datos de los modelos 1, 2, 3 y 4 | 112 |
| 5.1. Datos del modelo 5               | 141 |
| 5.2. Datos del modelo 6               | 145 |
| 5.3. Datos de los modelos 5 y 6       | 146 |

## **LISTA DE FIGURAS**

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Hermanos Wright haciendo volar el Flyer.  | 10 |
| 1.2. Ilustración de un combate aéreo entre un Fokker Dr.1 (El barón rojo) y varios Spad. | 11 |
| 1.3. Operario de tierra realizando funciones de mantenimiento a un Me-262.               | 12 |
| 1.4. Airbus A320.  | 13 |
| 1.5. Distribución de materiales compuestos en el Airbus A380.                            | 14 |
| 2.1. Partes geométricas móviles del ala.   | 22 |
| 2.2. Partes de un perfil aerodinámico.   | 24 |
| 2.3. Ejemplo de secciones para la teoría de pared delgada.                               | 29 |
| 3.1. Sección modelo 1.   | 31 |
| 3.2. Sección modelo 2.   | 31 |
| 3.3. Sección modelo 3.   | 32 |
| 3.4. Sección modelo 4.   | 32 |
| 3.5. Sección modelo 5 (perfil NACA 2415).  | 33 |
| 3.6. Sección modelo 6 en el encastre (izquierda) y en la punta del ala (derecha).        | 33 |
| 3.7. Fuerzas sobre un avión en un viraje coordinado.                                     | 34 |
| 3.8. Factor de carga e incremento de la velocidad de pérdida.                            | 35 |
| 3.9. Factor de carga en función de los ángulos de alabeo.                                | 35 |
| 3.10. Distribución de la fuerza en los modelos 1, 2, 3, 4 y 5A.                          | 37 |
| 3.11. Distribución de presiones en los modelos 5B y 6.                                   | 37 |
| 3.12. Ejemplo de distribución y tamaño de la malla para el modelo 4.                     | 38 |
| 4.1. Sección acotada y distribución de la carga del modelo 4.                            | 40 |
| 4.2. Deformada del modelo 1A MEF.  | 42 |
| 4.3. Distribución de tensiones normales sobre la mitad del modelo 1A MEF.                | 43 |

|   |    |
|---|----|
| 4.4. Deformada del modelo 1B MEF.   | 44 |
| 4.5. Distribución de tensiones normales sobre la mitad del modelo 1B MEF.       | 45 |
| 4.6. Distribución de los tramos en la sección del modelo 4.                     | 46 |
| 4.7. Diagrama de esfuerzos cortantes de la sección abierta del modelo 1A.       | 48 |
| 4.8. Diagrama de esfuerzos cortantes debido a la carga vertical del modelo 1A.  | 49 |
| 4.9. Esfuerzos cortantes en la mitad del modelo 1A MEF.                         | 50 |
| 4.10. Esfuerzos cortantes en la mitad del modelo 1B MEF.                        | 52 |
| 4.11. Sección acotada y distribución de la carga del modelo 2.                  | 53 |
| 4.12. Deformada del modelo 2A MEF.  | 55 |
| 4.13. Distribución de tensiones normales sobre la mitad del modelo 2A MEF.      | 55 |
| 4.14. Deformada modelo 2B MEF.  | 57 |
| 4.15. Distribución de tensiones normales sobre la mitad del modelo 2B MEF.      | 57 |
| 4.16. Distribución de los tramos en la sección del modelo 2.                    | 58 |
| 4.17. Diagrama de esfuerzos cortantes de la sección abierta del modelo 2A.      | 62 |
| 4.18. Diagrama de esfuerzos cortantes debido a la carga vertical del modelo 2A. | 63 |
| 4.19. Esfuerzos cortantes en la mitad del modelo 2A MEF.                        | 64 |
| 4.20. Esfuerzos cortantes en la mitad del modelo 2B MEF.                        | 66 |
| 4.21. Sección acotada y distribución de la carga del modelo 3.                  | 67 |
| 4.22. Deformada del modelo 3A MEF.  | 69 |
| 4.23. Tensión normal del modelo 3A MEF.   | 69 |
| 4.24. Deformada modelo 3B MEF.  | 70 |
| 4.25. Tensión normal del modelo 3B MEF.   | 71 |
| 4.26. Distribución de los tramos en la sección del modelo 3.                    | 71 |
| 4.27. Distribución secciones cerradas del modelo 3.                             | 74 |
| 4.28. Distribución y sentido de los momentos torsores del modelo 3.             | 78 |
| 4.29. Diagrama de cortantes de la sección abierta del modelo 3A.                | 82 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.30. Diagrama de cortantes para la carga vertical del modelo 3A.        | 82  |
| 4.31. Esfuerzos cortantes del modelo 3A MEF.                             | 83  |
| 4.32. Esfuerzos cortantes del modelo 3B MEF.                             | 85  |
| 4.33. Sección acotada y distribución de la carga del modelo 4.           | 87  |
| 4.34. Deformada del modelo 4A MEF.                                       | 89  |
| 4.35. Distribución de tensiones normales en el modelo 4A MEF.            | 89  |
| 4.36. Deformada modelo 4B MEF.   | 90  |
| 4.37. Distribución de la tensión normal en el modelo 4B MEF.             | 91  |
| 4.38. Distribución de los tramos de la sección abierta para el modelo 4. | 91  |
| 4.39. Distribución de las secciones cerradas para el modelo 4.           | 93  |
| 4.40. Distribución y sentido de los momentos torsores del modelo 4.      | 100 |
| 4.41. Diagrama de cortantes de la sección abierta del modelo 4A.         | 106 |
| 4.42. Diagrama de cortantes para la carga vertical del modelo 4A.        | 106 |
| 4.43. Esfuerzos cortantes del modelo 4A MEF.                             | 107 |
| 4.44. Esfuerzos cortantes del modelo 4B MEF.                             | 110 |
| 5.1. Perfil NACA 2415.   | 113 |
| 5.2. Modelo 5 MEF acotado.   | 114 |
| 5.3. Vista de la sección transversal del modelo 5.                       | 115 |
| 5.4. Vista de la sección horizontal del modelo 5.                        | 115 |
| 5.5. Distribución de espesores en el modelo 5.                           | 116 |
| 5.6. Vista en planta del ala del Airbus A320.                            | 116 |
| 5.7. Vista acotada en planta del ala del Airbus A320.                    | 117 |
| 5.8. Vista transparente del modelo 6.                                    | 117 |
| 5.9. Distribución de espesores en el modelo 6A.                          | 118 |
| 5.10. Distribución de espesores en el modelo 6B.                         | 119 |
| 5.11. Modelo CFD del perfil NACA 2415.                                   | 120 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.12. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de 0°.        | 121 |
| 5.13. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de 4°.        | 122 |
| 5.14. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de 10°.       | 122 |
| 5.15. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de 15°.       | 123 |
| 5.15. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de 20°.       | 123 |
| 5.16. Distribución de presiones adimensionalizada en el extradós.                   | 125 |
| 5.17. Distribución de presiones adimensionalizada en el intradós.                   | 125 |
| 5.18. Secciones del extradós (izquierda) e intradós (derecha).                      | 127 |
| 5.19. Secciones del extradós para el cálculo de la distribución de presiones.       | 133 |
| 5.20. Secciones del intradós para el cálculo de la distribución de presiones.       | 135 |
| 5.21. Deformada del modelo 5A.  | 137 |
| 5.22. Distribución de tensiones de Von Misses en el modelo 5A.                      | 138 |
| 5.23. Corte horizontal del modelo 5A con la distribución de tensiones de cortadura. | 138 |
| 5.24. Deformada del modelo 5B.  | 139 |
| 5.25. Distribución de tensiones de Von Mises en el modelo 5A.                       | 139 |
| 5.26. Corte horizontal del modelo 5B con la distribución de tensiones de Von Mises. | 140 |
| 5.27. Corte horizontal del modelo 5B con la distribución de tensiones de cortadura. | 140 |
| 5.28. Deformada del modelo 6A.  | 141 |
| 5.29. Distribución de tensiones de Von Misses en el modelo 6A.                      | 142 |
| 5.30. Corte horizontal del modelo 6A con la distribución de tensiones de Von Mises. | 142 |
| 5.31. Corte horizontal del modelo 6A con la distribución de tensiones de cortadura. | 143 |
| 5.32. Deformada del modelo 6B.  | 143 |
| 5.33. Distribución de tensiones de Von Mises en el modelo 6B.                       | 144 |
| 5.34. Corte horizontal del modelo 6B con la distribución de tensiones de Von Mises. | 144 |
| 5.35. Corte horizontal del modelo 6B con la distribución de tensiones de cortadura. | 145 |

# **1.-INTRODUCCIÓN**

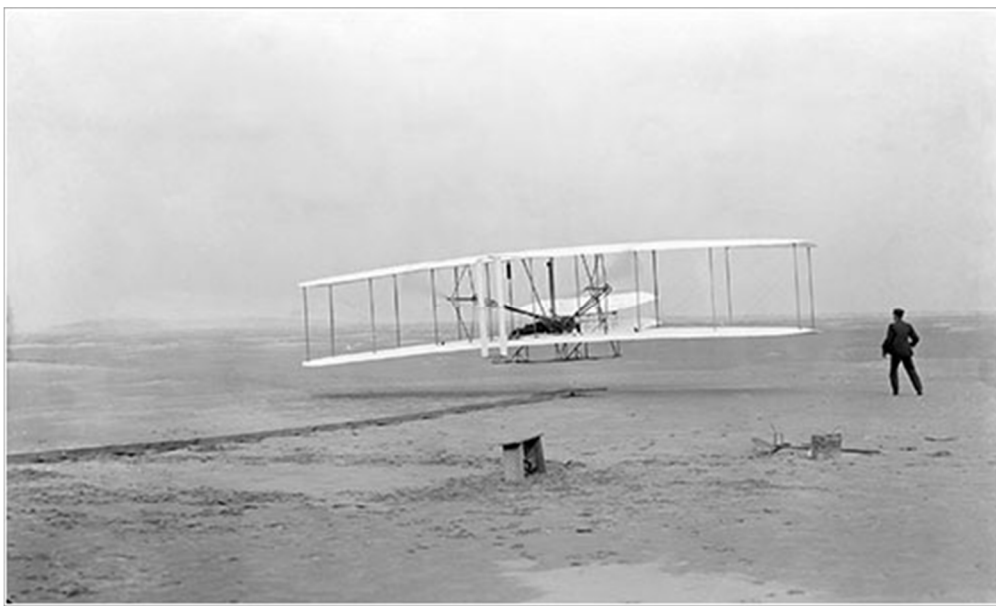
## **1.1.-MOTIVACIÓN**

El hombre siempre ha sentido fascinación por las aves, las cuales siendo más pesadas que el aire eran capaces de volar. En el afán de imitar a estos animales y ser capaces de volar, el hombre a lo largo de la historia se ha dotado de diferentes artilugios y alas con el fin de conseguir el objetivo de volar, lanzándose en numerosas ocasiones desde grandes alturas con resultados como se puede imaginar no muy favorables.

El primer hito dentro de los intentos por volar lo tenemos con Pilâtre de Rozier y el Marqués de Arlandes cuando el 21 de noviembre de 1783 a bordo de un globo con aire caliente sobrevolaron París. Este hecho dio comienzo a la aparición de los globos aerostáticos y los dirigibles, siendo el primer dirigible con motor el de Henri Giffard en 1852.

Durante el S.XIX George Cayley realizó los primeros estudios de sustentación y resistencia en alas, creando en 1835 un planeador que consiguió recorrer 450 m. Posteriormente Otto Lilienthal continuó en esta línea y consiguió realizar vuelos controlados llegando a alturas de 300 m.

Llegados a este punto, aparecen en escena los famosos hermanos Wright, los cuales en 1899 se vuelcan en la idea de conseguir el primer vuelo controlado y con motor. Para ello recopilan todos los progresos de Otto Lilienthal e información del Instituto Smithsonian. Con ello en 1900 consiguen controlar un aparato volador con alas flexibles pero este no generaba la sustentación necesaria para volar. Después de muchos estudios y cálculos, el 17 de diciembre de 1903 consiguen hacer el primer vuelo controlado con motor con su modelo Flyer (figura 1.1).



*Figura 1.1. Hermanos Wright haciendo volar el Flyer.*

A partir de este momento comienza una carrera en Europa por conseguir nuevas y mayores marcas en el campo de la aviación. Por ejemplo Louis Blériot que el 25 de Julio de 1909 cruza el canal de la Mancha en 37 minutos en su modelo Blériot XI, el cual ya disponía de una configuración moderna de tren de aterrizaje y motor delantero.

Con una aviación aun en sus inicios estalla la primera guerra mundial, la cual iba a suponer una revolución absoluta para la aviación. Al inicio, los países beligerantes solo disponían en total de menos de 500 aviones. El uso de estos, en un principio, se limitaba a la observación con toma de fotografías y a la calibración del tiro de la artillería, pero el cada vez más usual encuentro entre aviones enemigos propicio la aparición de los cazas y la necesidad de controlar el espacio aéreo, ganando cada vez más importancia el avión. Debido a esta circunstancia se propició un rápido avance en la tecnología y construcción de los diferentes modelos de aviones, los cuales se iban superando unos a otros como son el caso de los Fokker, Niuport, De Havilland, Albatros, Spad, Sopwith, etc (figura 1.2). También con el paso de la guerra empezó a tomar importancia el hecho de poder lanzar bombas desde el aire, apareciendo los primeros grandes bombarderos como el Gotha o el tipo R. Esta época de guerra supuso un gran avance, ya que se pasó de pequeños aviones de recreo con estructuras y alas hechas en madera recubiertas por tela, a aviones, ya en el final de la guerra, con fuselajes y estructuras en metal, los cuales podían superar los 200 Km/h de velocidad y los 7000 m de altitud.



*Figura 1.2. Ilustración de un combate aéreo entre un Fokker Dr.1 (El barón rojo) y varios Spad.*

En la década de los 20' y 30', ya con la guerra finalizada, se continuó con el avance en el campo de la aviación, y muchos de los aviones utilizados en ella se reconvirtieron a uso civil, como pudo ser por ejemplo para el transporte de correo y el de pasajeros. De esta forma aparecieron las primeras aerolíneas como Lufthansa, Air France o BOAC (British Overseas

Airway Corporation). También continuaron consiguiéndose nuevos hitos, como el primer vuelo transatlántico en 1919 (realizado por Alcock y Brown), o el famoso vuelo del Lindbergh a bordo del Spirit of St. Louis el 20 de mayo de 1927, que recorrió sin escalas los 5800 kms que separan Nueva York de París en 33 horas y media. Este hito supuso un impulso para la aviación comercial ya que puso en liza el potencial de los vuelos de pasajeros transatlánticos. Con los vuelos transatlánticos aparecieron los primeros hidroaviones como el Boeing 247 y los Douglas DC-1, 2 y 3, que hicieron más cómodos, confortables y económicos los vuelos, al no necesitar de grandes infraestructuras como los aeródromos.

En 1939 estalla la segunda guerra mundial, y al igual que en la primera, esta propicio un avance espectacular de la aviación. Alemania empezó liderando esta carrera por la supremacía aérea con modelos como el Messermicht BF-109, Heinkel 111 o el Ju 87 Stuka, los cuales estaban un escalón muy superior a cualquier avión de su época, debido a que contaban con motores mucho más potentes, diseños de fuselaje y ala más eficientes y materiales más resistentes y ligeros. Rápidamente el resto de potencias comenzaron a fabricar aviones con características iguales o superiores a los alemanes, lo que produjo una evolución sin precedentes en la aviación. Fruto de esta carrera aeronáutica aparecieron aviones como los Hurricane, Spitfire, De Havilland Mosquito o Lancaster (Inglaterra); Corsair, Hellcat, P-51 Mustang, Curtiss, B-25 o B-29 (EE.UU.); I-16, Yak-1, MiG-1, LaGG-3 o Pe-2 (URSS); Mitsubishi A6M Reisen "Zero", Kawanishi N1K Shiden "George", Nakajima B6N Tenzan "Jill", Yokosuka P1Y Ginga "Frances" (Japón). Los alemanes por su parte siguieron a su vez mejorando sus modelos ya existentes para no perder esta carrera y fabricaron nuevos modelos como el Focke-Wulf Fw 190 o el primer avión a reacción de combate, el Messerschmitt Me-262 (figura 1.3). Este avión supuso un avance espectacular, superando ampliamente en todos los aspectos a cualquier aparato hasta ese momento conocido, ya que entre otras características alcanzaba velocidades superiores a los 900 Km/h.



*Figura 1.3. Operario de tierra realizando funciones de mantenimiento a un Me-262.*

Esta carrera aeronáutica supuso la aparición de nuevos sistemas de detección (radar, sonar...), introducción de la giroscópica para determinar el rumbo con gran exactitud, métodos más eficaces de propulsión (turborreactores) y el uso de nuevas aleaciones de acero y aluminio.



Con el final de la guerra se volvió a poner el interés en la aviación civil, consiguiendo un gran impulso gracias a los avances logrados durante la guerra. Se consiguieron vuelos más cómodos gracias a las cabinas presurizadas que permitían volar a gran altitud esquivando los fenómenos meteorológicos adversos. Ejemplos de estos nuevos aviones son el Lockheed Constellation y el Douglas DC-7.

Hasta este momento el volar era una cosa de lujo reservado a unos pocos, pero con la introducción de los motores a reacción a mediados de los 50' con aviones como el Havilland Comet (primer avión comercial a reacción), Boeing B707 y Douglas DC-8, empezaron a ser más asequibles los billetes y posibilitó que poco a poco se popularizaran los viajes en avión.

En los 60' aparecen dos aviones clásicos de la aviación civil como son el Boeing 727 y 737 que siguen en servicio hoy en día. En 1967 se funda Airbus por parte de los gobiernos de Reino Unido, Francia, Alemania y de la región de Tolouse que será la gran rival de Boeing en el futuro.

La siguiente meta que hubo en la aviación civil fue crear el primer avión supersónico comercial, cuyo honor recae en el Concorde que entro en servicio en 1976. Tecnológicamente era muy avanzado y un orgullo para Reino Unido y Francia, que fueron quienes lo desarrollaron, pero económicamente no era rentable, obligando a que estuviera subvencionado para permitir que siguiera en servicio. Su retirada se produjo en 2003 tras un grave accidente.

Se demostró que los vuelos supersónicos comerciales eran posibles pero no rentables. Debido a esto, en esta década de los 70', se siguió trabajando en aviones más convencionales pero de más tamaño como los Boeing 747 (capacidad de 400 pasajeros), Douglas DC-10 y Lockheed Tristar.

La aviación comercial a partir de este punto siguió avanzando tecnológicamente pero a un menor ritmo. El mayor logro que se consiguió fue su total popularización a nivel mundial gracias al abaratamiento de los costes y el gran avance e implementación de los ordenadores. En estas tres últimas décadas hemos visto la gran competencia surgida entre Boeing y Airbus, la cual ha ido introduciendo los aviones de la serie A300 como el A320 (figura 1.4), que disponía de un nuevo sistema de control denominado fly by wire.



*Figura 1.4. Airbus A320*

En cuanto al apartado de la aviación militar el avance tecnológico nunca se ha detenido. Después de la guerra se introdujo masivamente el motor a reacción, destacando los MiG (URSS). Posteriormente, en los 70', aparecen los F-14 Tomcat y F-15 Eagle que supusieron un salto tecnológico respecto al resto de aparatos por su gran versatilidad y funcionalidad, los Harrier de despegue vertical y los famosos F/A-18 Hornet. Actualmente los aviones más avanzados son el F-22 Raptor (EE.UU.) y el Eurofighter Typhoon (Europa).

Como se ha podido leer, la industria aeronáutica ha ido ganando importancia y peso desde sus inicios hasta hoy en día, convirtiéndose en una industria de gran protagonismo en la económica y símbolo de modernidad y tecnología. Solo hay que ver la evolución que ha seguido, desde los primeros aviones realizados en madera y tela, posteriormente la introducción de los metales como el acero y aluminio, la mejora de estos con nuevas aleaciones y terminando con la aparición del titanio, la fibra de carbono y en la actualidad los materiales compuestos. Un ejemplo del uso de los nuevos materiales es el Airbus A380 (figura 1.5).

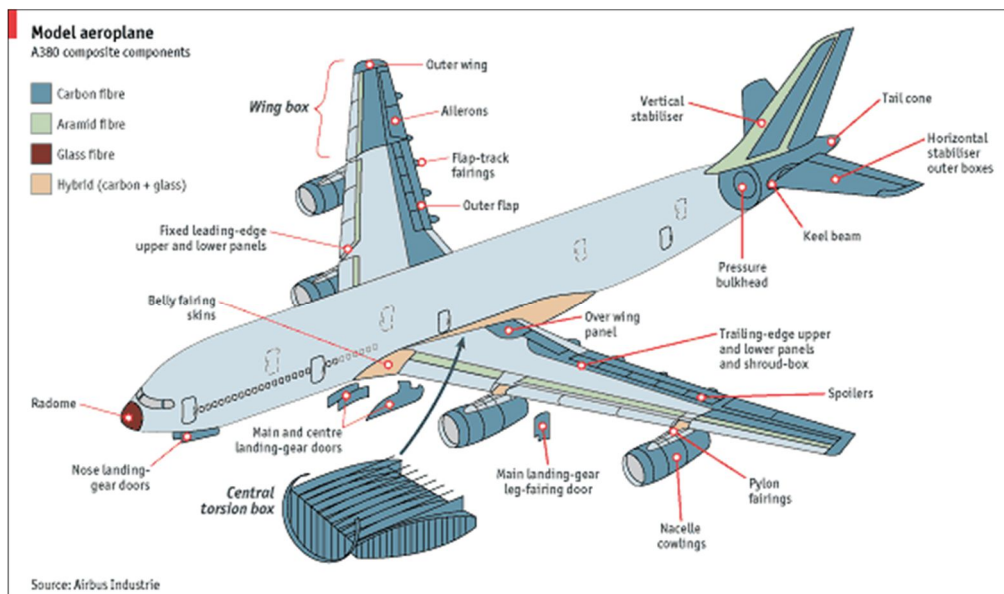


Figura 1.5. Distribución de materiales compuestos en el Airbus A380.

Este último punto pone de relieve la importancia del desarrollo y mejora de los materiales en el sector aeronáutico, donde día a día se investiga en nuevos materiales con unas propiedades mecánicas superiores y a la vez con una reducción de peso. Este criterio es fundamental para conseguir aparatos con unas prestaciones en cuanto a velocidad y capacidad de carga mayores, además de una reducción de emisiones contaminantes, tema de vital importancia en la actualidad.

Con todo esto, el estudio de los esfuerzos que se producen sobre un ala y cómo se comporta esta no deja de ser un tema interesante y de actualidad, que nos permitirá adaptar y diseñar posteriormente diferentes configuraciones de materiales con el fin de conseguir la más óptima, cumpliendo los diferentes criterios que entran en juego en el diseño de un ala.

## **1.2.-OBJETIVO**

Como se ha planteado anteriormente, se ha querido conseguir un método sencillo que permita dimensionar, conocer los esfuerzos y como estos afectan a un ala, para poder trabajar posteriormente con diferentes configuraciones de materiales y elegir la más óptima para los problemas y solicitaciones que se plantean. Con este fin tenemos estos objetivos parciales:

- Creación de modelos sencillos, aumentando su complejidad progresivamente, para su cálculo analítico.
- Utilización del software Abaqus para el cálculo mediante MEF de dichos modelos.
- Validación del MEF mediante la comparación de resultados obtenidos analíticamente y los obtenidos mediante MEF.
- Obtención de la distribución de presiones en el ala de un Airbus A320.
- Cálculo de las tensiones y deformaciones mediante MEF del ala de un Airbus A320 bajo condiciones de carga de operación.
- Optimización en el diseño del ala de un Airbus A320 basado en los resultados obtenidos previamente.

## **1.3.-RESUMEN**

Este proyecto está estructurado en 7 apartados: introducción, antecedentes, planteamiento del problema, modelos simplificados, modelos en detalle, conclusiones y trabajos futuros y referencias.

### Introducción

Como se ha leído previamente se hace un pequeño resumen de la historia de la aviación, que se ha querido conseguir con este proyecto y un resumen de todo la memoria.

### Antecedentes

Se habla sobre el método de elementos finitos (MEF) y el software que usado, Abaqus. Luego se ha descrito que es un ala y como funciona esta. Para terminar se ha hecho una breve descripción de la teoría de pared delgada y porque ha sido valida en nuestro caso.

### Planteamiento del problema

En este apartado se ha comenzado el grueso del proyecto. En el se ha descrito como son los modelos analizados, que cargas y como están aplicadas y como se han realizado los modelos mediante MEF.

### Modelos simplificados

Se han explicado todos los cálculos necesarios para el cálculo de flechas y tensiones para los modelos 1, 2, 3 y 4, tanto analíticos como los de MEF.

### Modelos en detalle

Este apartado se ha encargado de los modelos 5 y 6, que por su complejidad únicamente se realizaron los cálculos mediante MEF. También se hizo un estudio de la distribución de presiones reales del ala que se aplicó en ambos modelos.

### Conclusiones y trabajos futuros

Se ha hecho un resumen de las conclusiones a las que se han llegado después del análisis de los diferentes modelos. Para terminar se han dado unas pautas o ideas que se podrían realizar a partir de este proyecto para continuar y mejorar el trabajo ya realizado.

### Referencias

Se han recopilado todas las fuentes de información que se utilizaron.

## **2.-ANTECEDENTES**

### **2.1.- METODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)**

El método de elementos finitos (MEF) consiste en una técnica numérica para encontrar soluciones aproximadas a problemas de contorno para las ecuaciones diferenciales. Para ello utiliza métodos variacionales (el cálculo de variaciones) para minimizar una función de error y producir una solución estable. Un ejemplo de esto sería la idea de que la conexión de muchas líneas rectas pequeñas se puede aproximar a un círculo más grande. MEF abarca todos los métodos para conectar muchas ecuaciones de elementos simples durante muchos pequeños subdominios, nombrado por elementos finitos, para aproximar una ecuación más compleja sobre un dominio más grande.

El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados “nodos”. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama “malla”.

Los cálculos se realizan sobre la malla de nodos, que sirven a su vez de base para la discretización del dominio en elementos finitos. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas). La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

En la mayoría de los casos el análisis de los elementos finitos se programa para calcular el campo de desplazamientos y, posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas las deformaciones y tensiones respectivamente, cuando se trata de un problema de mecánica de sólidos deformables o más generalmente un problema de mecánica de medios continuos. El método de los elementos finitos es muy usado debido a su generalidad y a la facilidad de introducir dominios de cálculo complejos (en dos o tres dimensiones). Además el método es fácilmente adaptable a problemas de transmisión de calor, de mecánica de fluidos para calcular campos de velocidades y presiones (mecánica de fluidos computacional, CFD) o de campo electromagnético. Dada la imposibilidad práctica de encontrar la solución analítica de estos problemas, con frecuencia en la práctica ingenieril, los métodos numéricos y, en particular, los elementos finitos, se convierten en la única alternativa práctica de cálculo.

Una importante propiedad del método es la convergencia; si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

Para llevar a cabo el método de elementos finitos se pueden seguir las tres etapas explicadas a continuación:

- Preproceso: En esta etapa se prepara el modelo para el cálculo. Para ello se realiza lo siguiente:
  - Dibujo de la geometría del modelo.
  - Selección de las propiedades de los materiales.
  - Aplicación de cargas exteriores y condiciones de contorno.
  - Discretización del modelo en elementos finitos (Mallado).
- Análisis: Se realizan todos los cálculos y se generan las soluciones. En ella se realizan las operaciones de:
  - Selección del tipo de cálculo a realizar.
  - Configuración de los parámetros de cálculo, intervalos de tiempo y número de iteraciones
  - Transferencia de las cargas al modelo, generación de funciones de forma, ensamblaje de la matriz de rigidez, resolución de sistemas de ecuaciones y obtención de la solución.
- Postproceso: En esta etapa se realiza la representación gráfica de los resultados, así como la obtención de resultados indirectos operando las soluciones del modelo.

En nuestro caso para realizar este proceso mediante el método de elementos finitos se ha utilizado el software ABAQUS 6.12.

### **ABAQUS**

Abaqus es un código de análisis por el método de los elementos finitos de propósito general, orientado a la resolución de problemas no lineales. Fue desarrollado hace más de 20 años por la empresa Hibbit, Karlsson& Sorensen, Inc. (HKS), y en la actualidad se utiliza para resolver grandes y complejos problemas de ingeniería. Abaqus puede ser utilizado para resolver problemas de resistencia de materiales, mecánica de fractura, ingeniería forense, procesos de conformado de metales, transferencia de calor, electromagnetismo, mecánica de fluidos, etc.

Abaqus está estructurado en tres grandes bloques, en correspondencia con las tres etapas en que se divide un problema para ser analizado por el método de elementos finitos (preproceso, análisis y postproceso).

Abaqus se encuentra dividido en cuatro módulos:

- ABAQUS/Standard: Para resolución de problemas de propósito general. Incluye todas las posibilidades de análisis excepto el análisis dinámico.

- ABAQUS/Explicit: Para resolución de problemas de tipo dinámico. Es poderoso por su eficiencia computacional en grandes modelos, y también altamente efectivo para aplicaciones cuasi-estáticas.
- ABAQUS/CAE: Módulo interactivo para la creación de modelos de elementos finitos. A través de este módulo se puede implementar un modelo de forma sencilla y rápida.
- ABAQUS/Viewer: Módulo de visualización de soluciones. Muestra los resultados obtenidos una vez resuelto el problema.

Para resolver un problema mediante ABAQUS 6.12, se deben introducir los datos de entrada que necesita el programa. Esta etapa se corresponde con la etapa de preproceso del método de los elementos finitos.

Los datos de entrada se introducen en el programa a través de un archivo de texto (input file) que contiene toda la información necesaria para realizar la simulación. Este archivo de texto, también denominado “archivo de entrada”, se puede crear de forma interactiva utilizando ABAQUS/CAE, que genera internamente el archivo de texto, o mediante un editor de texto, donde el archivo es escrito directamente por el usuario.

Los datos que se introducen en el archivo de entrada son de dos tipos, model data y history data. Los model data que se utilizan para definir el modelo de elementos finitos son:

- Características geométricas. La geometría es lo primero que se introduce y debe representar lo más fielmente posible el cuerpo real que se va a estudiar. ABAQUS permite realizar modelos de geometría muy compleja, gracias al módulo ABAQUS/CAE. La geometría, así como el mallado de un modelo, se define mediante los elementos y sus nodos.
- Características del material. El modelo que se va a implementar puede estar formado de varios materiales. Se deben definir las propiedades de los distintos materiales de los que está formado el modelo, y se deben asociar a las partes de la geometría a las que correspondan.
- Partes y ensamblaje. La geometría del modelo se puede definir organizándola en partes, por lo tanto, hay que introducir en el archivo de entrada la relación que existe entre esas partes, además de la posición relativa de unas respecto de las otras. Esto se lleva a cabo a través de un procedimiento conocido como ensamblaje.
- Condiciones iniciales. Se deben especificar las condiciones iniciales del modelo. En ocasiones, es necesario especificar condiciones iniciales distintas de cero para tensiones, temperaturas, velocidades, etc.
- Condiciones de contorno. El modelo puede estar sometido a ciertas imposiciones por parte de su entorno que deben ser especificadas en el archivo de entrada. Se pueden imponer restricciones del movimiento, valores de desplazamientos y rotaciones o condiciones de simetría.

- Mallado. Es un proceso mediante el cual el modelo de estudio se divide en diferentes elementos en los que se resuelven las ecuaciones de campo.

Después de introducir el archivo de entrada en el programa, se procede a la resolución del modelo. Esta fase es interna y en ella Abaqus no interacciona con el usuario. Una vez que Abaqus ha resuelto el modelo, los resultados de la simulación se ven a través del módulo de visualización, el cual, lee el archivo de datos de salida (output file), y es capaz de crear animaciones de la simulación, gráfico, tablas de resultados, etc. La visualización de los resultados se corresponde con la etapa de postproceso del método de elementos finitos.

## **2.2.-ALAS**

El ala de un avión es un perfil aerodinámico y es el elemento primordial de cualquier aeroplano. En ellas es donde se originan las fuerzas que hacen posible el vuelo. En su diseño se tienen en cuenta numerosos aspectos: peso máximo a soportar, resistencias generadas, comportamiento en la pérdida, etc.. O lo que es lo mismo, todos aquellos factores que proporcionen el rendimiento óptimo para compaginar la mejor velocidad con el mayor alcance y el menor consumo de combustible posibles.

### **2.2.1.- FUNCIONES DEL ALA**

La principal función de un ala es crear la sustentación necesaria para mantener al avión en vuelo, pero debido a la evolución de los mismos y a los avances tecnológicos que se han producido desde su invención a principios del S.XX, el ala ha ido adquiriendo más funciones que se detallan a continuación:

- Dar sustentación y mantener el vuelo compensando el peso del avión.
- Proveer de controlabilidad al avión en vuelo. Normalmente el ala es la encargada de las funciones de control de balance, mediante la disposición del diedro, así como de las funciones de control alrededor del eje longitudinal mediante los alerones.
- Asegurar la capacidad de despegue y aterrizaje del avión, cosa que suele realizar ayudándose de los dispositivos hipersustentadores, aumentando el área efectiva o el coeficiente de sustentación.
- En aquellos aviones con motores en ala es la encargada de sujetar el o los motores y transmitir su empuje al avión completo. Así como los sistemas necesarios para el drenaje de aire del motor, suministros de combustible al motor y control del motor (cableado, el sistema que realiza el control del motor no está situado normalmente en el ala).
- Alojar el combustible. Con el paso de los años el ala se ha adaptado para llevar en el interior de su estructura el combustible que el avión utiliza para el vuelo. Esto es debido a que el peso del combustible no ha de alterar la posición del centro de



gravidad para mantener el centrado aerodinámico del avión. El combustible se lleva también en la parte baja del encastre y en algunos aviones de transporte grandes en un depósito trasero para mantener el centrado. Por lo tanto la estructura interna del ala debe estar preparada para contener combustible (protección química).

- Luces y señalización, ya que en los extremos del ala suelen encontrarse normalmente luces que son utilizadas para la señalización como por ejemplo, la luces de navegación.
- Soporte de armamento. En los aviones militares los misiles suelen estar montados sobre el ala y el fuselaje.
- Soporte de tanques de combustible externos. Muchos aviones (en especial militares) llevan tanques de combustible auxiliares para misiones de largo alcance
- Alojamiento del tren de aterrizaje, ya que muchos aviones tiene parte o bien todo el tren de aterrizaje dentro del ala.
- Soporte para la salida de emergencia debido a que muchas salidas de emergencia están localizadas al lado del ala, por lo que esta debe ser capaz de aguantar en un momento de evacuación a los pasajeros sobre ella.

### **2.2.2.- PARTES GEOMÉTRICAS MÓVILES DEL ALA**

Un avión no precisa siempre de la misma carga de sustentación debido a que necesita realizar giros, aumentar o disminuir altitud, etc. Por este motivo el ala se dota de unas partes móviles y fijas que le permiten realizar todas estas maniobras, mejorar la estabilidad y disminuir la fuerza de arrastre. Estas partes se pueden ver en la figura 2.1 y se detallan a continuación:

- Dispositivo de punta de ala (1): Son formas geométricas instaladas en el extremo del ala. Su misión es reducir la resistencia inducida del ala ya que evita la conexión entre el intradós y el extradós. La distribución de presiones a lo largo del ala no es uniforme y se produce un fenómeno de barrido de aire hacia la punta del ala, provocando la formación de los vórtices de punta de ala. Esto provoca que el ala de energía cinética (en forma de torbellino) al aire, consumiendo energía en este proceso. Los winglets o aletas reducen este fenómeno, pero en contra generan un elevado momento flector en el encastre del ala. Otros dispositivos de punta de ala son los *sharklets*.
- Alerones: Se encargan de controlar el movimiento de balance en vuelo del avión. Para ello se crea una deflexión de manera asimétrica (un alerón hacia arriba y otro hacia abajo), esto consigue que el avión gire sobre su eje longitudinal. Es de esta forma por la que el avión realiza giros laterales sin consumir una cantidad elevada de combustible y en un espacio reducido. Existen dos alerones en el ala:
  - Alerón de baja velocidad (2): usado para realizar giros con el avión a bajo Mach.

- Alerón de alta velocidad (3): usado para realizar giros con el avión a Mach de crucero.
- Dispositivos hipersustentadores: Son usados durante el despegue o el aterrizaje. La misión de estos elementos es reducir la velocidad mínima que el avión necesita para despegar o aterrizar. Para lograrlo hay varias técnicas: aumentar la superficie del ala, el coeficiente de sustentación del ala o aumentar el coeficiente de sustentación máximo del ala. De esta forma se incrementa la fuerza total de sustentación a una velocidad dada, pudiendo aterrizar a una menor velocidad. La deflexión de estos dispositivos incrementa la resistencia aerodinámica del avión. Pueden ser dispositivos pasivos (mediante una modificación de geometría) o activos (mediante la inyección de energía al aire). Algunos de estos dispositivos son:
  - Carenados de los *flaps* (4)
  - *Flap* Krueger (5): es un dispositivo hipersustentador pasivo complejo.
  - *Slats* (6). Son dispositivos de borde de ataque.
  - *Flap* de 3 partes interior (7).
  - *Flap* de 3 partes exterior (8).
- *Spoiler*, disruptor o deflector (9): Son unos elementos usados para destruir la sustentación del ala. Son usados durante el aterrizaje, una vez que el avión toca suelo con las ruedas se despliegan estos dispositivos que evitan que el avión vuelva al aire, a su vez también son usados en caso de descompresión en cabina, al romper la sustentación el avión baja rápidamente a un nivel de vuelo donde la presión sea la adecuada. Finalmente son usados por muchos aviones para bajar más rápidamente (se deflexionan ligeramente).
- *Spoiler-aerofreno* (10): Son unos elementos como los *spoilers* cuya función principal es crear resistencia al avance para permitir al avión frenar.

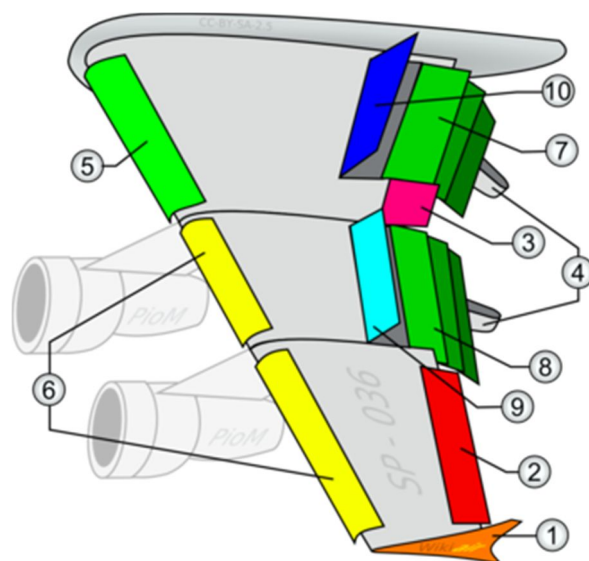


Figura 2.1. Partes geométricas móviles del ala.

### **2.2.3.- PERFIL NACA**

Existen muchas clases de perfiles aerodinámicos estandarizados, pero los más importantes, utilizados y estudiados son los perfiles NACA, que mediante una serie de números nos aporta la información geométrica del perfil.

La *National Advisory Committee for Aeronautics* (NACA) nace en 1915 con el objetivo de unificar todos los estudios aeronáuticos que se estaban realizando en Norte-América, convirtiéndose en una de las sociedades de investigaciones aerodinámicas más importantes. Su presidente ordena la construcción de un gran túnel de viento y tras realizar numerosas investigaciones, publican "*The Characteristics of 78 Related Airfoil Sections from Tests in the Variable-Density Wind Tunnel*" en el que se describen los perfiles de cuatro dígitos que pasarán a llamarse NACA. Desde entonces hasta 1958, cuando NACA pasó a ser la *National Aeronautics and Space Administration*, se han realizado numerosísimas investigaciones y avances aerodinámicos, siendo actualmente la sociedad aerodinámica más importante. Antes de explicar la clasificación y características de los perfiles NACA detallaremos conceptos, partes y regiones principales de un perfil. En la figura 2.2 se pueden ver estos datos sobre un perfil.

- Intradós: Parte inferior del perfil alar.
- Extradós: Parte exterior del perfil alar.
- Borde de ataque: Es la parte delantera del perfil alar. Se le denomina "borde de ataque" ya que es la primera parte que toma contacto con la corriente de aire, provocando que esta se bifurque hacia el intradós y el extradós.
- Borde de salida: Llamado también "borde de fuga". Corresponde al punto en el que las corrientes de aire provenientes del intradós y extradós confluyen y abandonan el perfil.
- Ángulo de ataque: Es el ángulo entre la cuerda del perfil y la dirección del aire que incide sobre el mismo.
- Línea de cuerda (1): Es una línea recta que une el borde de ataque y el borde de fuga del perfil.
- Cuerda (2): Es la longitud de la línea anterior. Todas las dimensiones de los perfiles se miden en términos de la cuerda.
- Línea de curvatura media (3): Línea que une el borde de ataque con el de salida de forma que siempre resulte equidistante al extradós y al intradós.
- Curvatura máxima (4): Es la distancia máxima entre la línea de curvatura media y la línea de cuerda. La posición de la curvatura máxima es importante en la determinación de las características aerodinámicas de un perfil.

- Región de curvatura máxima (4): Área de un perfil alar comprendida entre la abscisa (eje X) del punto de inicio del borde de ataque y la abscisa de la curvatura máxima.
- Espesor máximo (5): Es la zona del perfil donde el espesor vertical es máximo.
- Región de Espesor máximo (5): Área de un perfil alar comprendida entre la abscisa (eje X) del punto de inicio del borde de ataque y la abscisa del espesor máximo.
- Radio del borde de ataque (6): Es una medida del afilamiento del borde de ataque. Puede variar desde 0, para perfiles supersónicos afilados, hasta un 2 por 100 (de la cuerda) para perfiles más bien achatados.

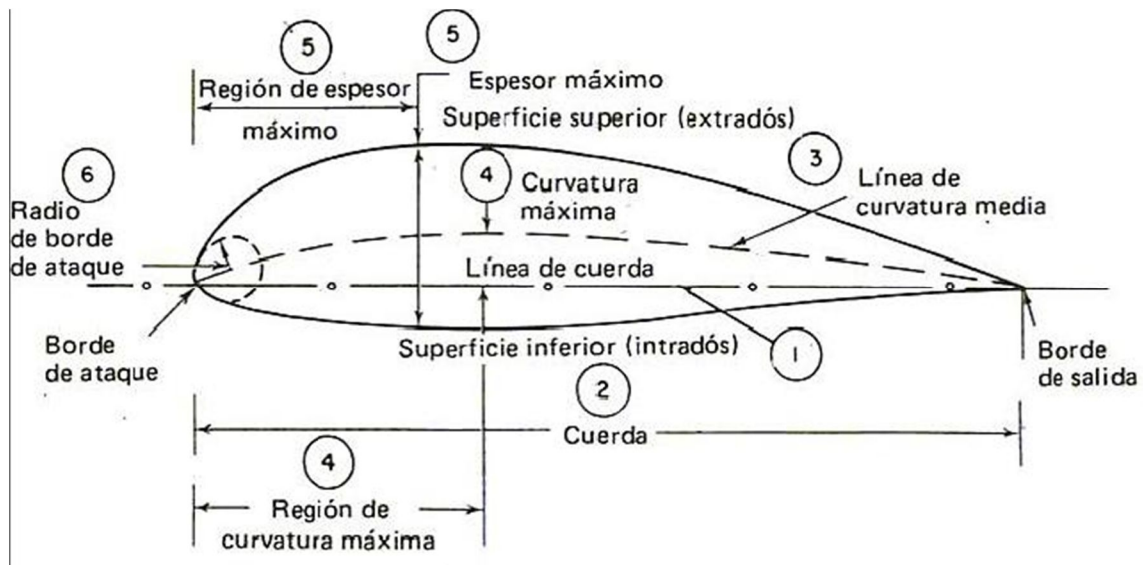


Figura 2.2. Partes de un perfil aerodinámico.

Para poder englobar a todos los tipos de perfiles que existen, la nomenclatura NACA ha creado 7 series:

- Four-digit series
- Five-digit series
- Modificaciones de la four y five digit series
- 1-series
- 6-series
- 7-series
- 8-series

#### Four – digit series

Está formado por un código de 4 números:

- El primer dígito describe la curvatura máxima como porcentaje de la cuerda (% c).
- El segundo dígito describe la distancia de máxima curvatura desde el borde de ataque en 1/10 del porcentaje de la cuerda.
- Los dos últimos dígitos describen el máximo espesor como % de la cuerda.

Ejemplo NACA 2412:

- Máxima curvatura del 2%
- Máxima curvatura localizada al 40% (0.4 cuerda) del borde de ataque
- Máximo espesor del 12% de la cuerda

#### Five – digit series

Está formado por un código de 5 números y describe perfiles mucho más complejos:

- Primer dígito: Cuando es multiplicado por 0,15, da el coeficiente de sustentación por sección (sectionlift coefficient).
- 2 dígitos siguientes: Cuando son divididos por 2, da p, que es la distancia de máxima curvatura desde el borde de ataque como % de la cuerda.
- 2 últimos dígitos: son la máxima curvatura del perfil (% de la cuerda).

Ejemplo NACA 12345

- Coeficiente de sustentación  $C = 0.15$ ,
- Curvatura máxima 0.115 c desde el borde de ataque.
- Curvatura máxima 0.45 de la cuerda.

#### Modificaciones de la Four – digit y Five – digit series

Las series de perfiles Four-digit y Five-digit se pueden modificar mediante un código de dos dígitos precedidos por un guión:

- El primer dígito describe la “redondez” del borde de ataque
  - Siendo 0 un borde afilado
  - Siendo 6 el mismo borde que el perfil original
  - Valores superiores indican un borde de ataque con más redondez que el original.
- El segundo dígito describe la distancia de máximo espesor desde el borde de ataque en 1/10 de % de la cuerda.

Ejemplo NACA 1234-05

- NACA 1234 con un borde de ataque afilado
- Máximo espesor a 50% of la cuerda

### 1 – series

En los años 30' se utilizó un nuevo enfoque para el diseño de los perfiles en el cual la forma del perfil se derivaba matemáticamente a partir de las características de sustentación deseadas. Está formado por un código de 5 números:

- El primer dígito describe la serie (1)
- El segundo dígito describe la distancia en la que se encuentra la zona de mínima presión en 1/10 de % de cuerda.
- El tercer dígito (precedido de un guión) describe el coeficiente de sustentación en 1/10.
- Los dos últimos dígitos describen el máximo espesor en 1/10 del % de la cuerda.

Ejemplo NACA 16-123

- Zona de mínima presión en el 60% de la cuerda.
- $Cl = 0,1$ .
- Espesor máximo del 23% de la cuerda.

### 6 – series

Es una mejora sobre la 1-series con énfasis en maximizar el flujo laminar.

- El número "6" indica la serie.
- El segundo dígito describe la distancia en la que se encuentra la zona de mínima de presión en 1/10 de % de cuerda.
- El tercer dígito (normalmente en forma de subíndice) describe que la resistencia se mantiene baja tantas décimas por debajo y por arriba del coeficiente de sustentación especificado (4º dígito).
- El cuarto dígito (precedido de un guión) describe el coeficiente de sustentación en 1/10.
- Los dos dígitos siguientes describen el máximo espesor en 1/10 del % de la cuerda.
- La "a=" seguida de un décima describe la fracción de la cuerda sobre la que el flujo laminar se mantiene. Si no se da ningún valor se asume que por defecto  $a=1$ .

Ejemplo NACA 61<sub>2</sub>-345 a=0.5

- Zona de mínima presión en el 10% de la cuerda
- Mantiene baja resistencia 0,2 por encima y por debajo del coeficiente de sustentación
- Máximo espesor en el 45% de la cuerda
- Mantiene flujo laminar sobre el 50% de la cuerda

### 7 y 8 series

Estas series presentan mejoras adicionales para maximizar el flujo laminar mediante la identificación de las zonas de baja presión, tanto el extradós como el intradós:

- El número "7" indica la serie.
- El segundo dígito describe la distancia de presión mínima en el extradós en 1/10 del % de la cuerda.
- El tercer dígito describe la distancia de presión mínima en el intradós en 1/10 del % de la cuerda.

- Una letra refiriéndose a un perfil estándar de series NACA previas.
- El cuarto dígito describe el coeficiente de sustentación en  $1/10$ .
- Los dos dígitos siguientes describen el máximo espesor en  $1/10$  del % de la cuerda.

Ejemplo NACA 712A345

- Área de mínima presión al 10% de la cuerda en el extradós
- Área de mínima presión al 20% de la cuerda en el intradós
- $Cl = 0.3$
- Espesor máximo del 45% de la cuerda.

La Serie 8 se diseñó para maximizar de forma independiente el flujo laminar en el extradós y el intradós.

### **2.3.-TEORÍA DE VIGAS DE PARED DELGADA**

Las estructuras esbeltas de paredes delgadas son utilizadas ampliamente en diversas construcciones de las industrias aeronáutica, espacial, mecánica, civil y naval, entre otras. De la variada gama de aplicaciones de las estructuras de paredes delgadas se pueden citar: fuselajes de aviones y cohetes, núcleos de rotores de helicópteros, álabes de turbo-máquinas, puentes, estructuras básicas de cascos de buques, estructuras de mono-carriles, núcleos de edificios, estructuras reticulares de mono-postos, etc. Existe un amplio espectro de métodos para diseño, análisis y cálculo de este tipo de estructuras, el cual abarca desde esquemas básicos como las teorías simples de vigas hasta el análisis de elasticidad tridimensional. Sin embargo, como nexo entre ambos extremos, las teorías de vigas de paredes delgadas se presentan como una alternativa singularmente atractiva ya que las mismas incluyen una importante serie de efectos no convencionales en su comportamiento mecánico, conduciendo a un sistema de ecuaciones diferenciales relativamente sencillo y suficientemente representativo.

Así pues, desde sus inicios, el interés por las teorías de vigas de paredes delgadas residió en la posibilidad de estudiar el comportamiento mecánico de estructuras complejas mediante soluciones sencillas de modelos de viga, ya que aquellas eran inabordables con una teoría tridimensional. Sin embargo, en la actualidad el interés por la utilización de las teorías de vigas de paredes delgadas radica en que su representación matemática es adecuada desde el punto de vista computacional y conceptual para la obtención de soluciones de índole tecnológica y práctica, pues permiten la resolución con menor consumo de tiempo y con una precisión que puede alcanzar a la de un costoso modelo tridimensional, especialmente en problemas complejos donde se involucra el acoplamiento del campo estructural con los medios fluidos y ambos asociados al control estructural bajo comportamiento no lineal.

La teoría general extensional, flexional y torsional de vigas rectas de paredes delgadas es una de las teorías tardías de mediados de siglo XX, cuyo estudio formal y coordinado comienza durante la década de 1930, con las investigaciones de rusos como Vlasov, Umanskii, Timoshenko, y alemanes como Kappus, Wagner y Bleich entre los más representativos de una época. Sin embargo, los obligados silencios exigidos en tiempos de guerra demoraron el empleo global de estas teorías hasta principios de la década de 1960. Hay que tener en cuenta que todo nuevo conocimiento vinculable a la industria bélica, era y se seguirá considerando material de importancia estratégica.

La teoría general de vigas de paredes delgadas, conocida a partir de los años '60 como Teoría de Vlasov, se ha empleado en una innumerable cantidad de aplicaciones tanto en códigos profesionales como en metodologías de cálculo específicas y más recientemente en programas de computación. A partir de la década de 1970, junto a la ya considerada clásica teoría de Vlasov, se han propuesto nuevas aplicaciones, extensiones y revisiones ampliadas de las teorías, que entre las más importantes incluyen: análisis de la respuesta dinámica en vibraciones libres y forzadas, estudios de pandeo localizado y global con secciones de geometría arbitraria, estudios de respuesta estática en regímenes elásticos y viscoelásticos, consideración de la flexibilidad por corte, estudios dinámicos con condiciones de borde no lineales, estudios de dinámica con forzamientos no lineales, control de estructuras de vigas de paredes delgadas y análisis asintótico de los modelos teóricos. La temática de los puntos citados se ha extendido indistintamente tanto en los modelos de vigas rectas como en los modelos de vigas curvadas. De tal manera que se han planteado diferentes alternativas, que van desde enfoques netamente ingenieriles como las denominadas " teorías técnicas ", hasta planteamientos rigurosamente estructurados en su formalismo matemático, basados en reducciones de las ecuaciones generales de la elasticidad tridimensional al contexto de elasticidad unidimensional.

La constante necesidad de mejorar diseños y comportamientos estructurales estimuló el desarrollo y la incorporación de materiales compuestos reforzados por fibras, más livianos y a la vez resistentes en distintos usos estructurales. Esto, exige generar los instrumentos analíticos apropiados para el abordaje de su diseño y cálculo, dado que tales materiales poseen ciertas propiedades de acoplamiento elásticos que permiten mitigar desplazamientos excesivos en ciertas direcciones, seleccionando tipo, orientación y cantidad de las fibras de refuerzo.

A partir de la década de 1980, aparecen los primeros modelos de vigas de paredes delgadas desarrollados para los novedosos materiales compuestos laminados reforzados con fibras. La evolución de la investigación y desarrollo de modelos en este campo específico se ha extendido durante las dos décadas pasadas, y en las cuales se ha tendido a dilucidar los complejos acoplamientos mecánicos y constitutivos que ofrecen los materiales compuestos presentes en las estructuras esbeltas. Los usos más relevantes de las teorías de este período se vuelcan con mayor énfasis en aplicaciones de las industrias aeronáutica y aeroespacial, donde las exigencias de reducción de peso manteniendo o mejorando los requisitos impuestos, son variables de diseño cruciales. El reemplazo de estructuras aeronáuticas construidas con materiales clásicos (entiéndase, aluminio y sus derivados) por el uso de estructuras esbeltas de materiales compuestos ha redundado en mejoras de hasta el 35% en la relación costo versus peso para la producción de aviones de combate como por ejemplo el Intruder A7, entre otros.

En la última década, la facilidad de acceso a tecnología computacional de alta potencia a costo relativamente bajo, condujo al análisis de problemas acoplados relativamente complejos considerando aspectos mecánico-estructurales no lineales, en muchos casos imposibles de encauzar en el pasado.

Con esta visión general de la teoría de viga de pared delgada se puede ver que está totalmente justificada el uso de ella en este proyecto, ya que se tiene el ala de un avión, la cual, es una estructura para en la que históricamente se ha empleado esta teoría para su diseño y CÁLCULO. Adicionalmente también está justificado el uso de estas hipótesis si se atiende a uno de los principios de la teoría de Vlasov, la cual como premisa para la aplicación de esta teoría se tiene que tener una relación entre el ancho y el espesor mayor a 10.





*Figura 2.3. Ejemplo de secciones para la teoría de pared delgada.*

En la figura 2.3 se puede ver un ejemplo de cuando es válida aplicar esta teoría y cuando no. El perfil en L tiene una relación entre el espesor y el ancho de 4,44 por lo que no sería apto para la teoría de pared delgada. Por el contrario, la sección rectangular tiene una relación entre el espesor y el ancho de 13,6 siendo válida para el cálculo mediante la teoría de pared delgada.

## **3.-PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Para la realización de este proyecto, que consiste en el cálculo estructural del ala de un Airbus A320, se llevaron a cabo un total de 6 modelos. En los primeros cuatro modelos se realizaron los cálculos analíticamente y mediante MEF, con lo que se comprobó si el método MEF era válido. Los resultados de ambos métodos fueron comparados para ver si las diferencias que había entre uno y otro eran asumibles. Los dos últimos modelos solo se realizaron mediante MEF debido a su complejidad.

Inicialmente se tomaron tres premisas para el desarrollo de los modelos:

- **Viga empotrada:** El ala del avión de cara a los cálculos y desarrollos que se realizaron se tomó como una viga empotrada. Esta premisa era totalmente válida debido a que el ala de un avión es una estructura que está sometida a diferentes fuerzas, la mayoría de ellas perpendicular a su superficie, y la relación de aspecto entre su longitud y sección es elevada. Por último se encuentra encastrada al fuselaje del avión únicamente por un extremo.
- **Teoría de pared delgada:** Los cálculos analíticos que se llevaron a cabo se realizaron mediante la teoría de pared delgada, ya que la relación de aspecto entre las dimensiones generales de los modelos y los espesores de los perfiles era elevada (mayor que una relación de 1 a 10), y respecto al cálculo tridimensional los resultados que se conseguirían serían igual de precisos pero con un coste en tiempo y esfuerzo mucho menor.
- **Para los cálculos de tensiones y deformaciones** se tomaron las propiedades de un aluminio 7075 con un módulo de Young de 70 GPa, un límite elástico de 490 MPa y un límite a cortadura de 330 MPa.

Con estas tres premisas aclaradas, la hoja de ruta que se siguió fue realizar primeramente un modelo muy sencillo, con una sección rectangular constante, para posteriormente ir complicando los modelos hasta llegar al último, que tiene la forma y dimensiones reales del ala del Airbus A320.

A su vez, de cada modelo se realizaron dos modelos. El primero era un modelo de espesor constante y sin ningún tipo de refuerzo. El segundo tenía espesores diferentes según las zonas y refuerzos en forma de costilla. Con esto se pretendió observar cómo se pueden mejorar las propiedades del ala a la vez que se conseguía un menor peso y una mejor optimización del material.

### **3.1.-DIMENSIONES Y FORMA**

A continuación se han detallado los diferentes modelos realizados.

#### **MODELO 1**

Este es el modelo más sencillo, su sección es rectangular con unas dimensiones de 4,3 m x 0,49 m y una longitud de 15 m (figura 3.1).



*Figura 3.1. Sección modelo 1.*

- Modelo 1A: El espesor es de 36 mm constante en toda la sección.
- Modelo 1B: Dispone de 7 costillas situadas equidistantes de 4 mm de espesor. El modelo estaba formado por dos espesores diferentes, uno de 18 mm situado en la superficie inferior y superior y otro de 12 mm situado en las superficies laterales.

#### **MODELO 2**

Es igual que el anterior, únicamente se cambió el lateral izquierdo de la sección que era recto por uno semicircular. Las dimensiones de la sección son 4,545 m x 0,49 m y 15 m de longitud (figura 3.2).



*Figura 3.2. Sección modelo 2.*

- Modelo 2A: El espesor es de 36 mm constante en toda la sección.
- Modelo 2B: Dispone de 7 costillas situadas equidistantes de 4 mm de espesor. El modelo estaba formado por dos espesores diferentes, uno de 18 mm situado en la superficie inferior y superior y otro de 11,7 mm situado en las superficies laterales.

### **MODELO 3**

Este modelo era la unión de los dos anteriores, por lo que la sección tiene las dimensiones globales del modelo 2 (4,545 m x 0,49 m) pero está formado por dos celdas (figura 3.3). Su longitud sigue siendo de 15 m.



*Figura 3.3. Sección modelo 3.*

- Modelo 3A: El espesor es de 30 mm constante en toda la sección.
- Modelo 3B: Dispone de 7 costillas situadas equidistantes de 4 mm de espesor. El modelo estaba formado por dos espesores diferentes, uno de 18 mm situado en la superficie inferior y superior y otro de 11,5 mm situado en las superficies laterales y en el tramo que separa las dos celdas.

### **MODELO 4**

Era el modelo más complejo de los que se iban a calcular analíticamente. Era igual que el modelo 3 con el añadido de una sección triangular en el lado derecho. Las dimensiones totales del modelo son 6,295 m x 0,49 m con una longitud de 15 m (figura 3.4).

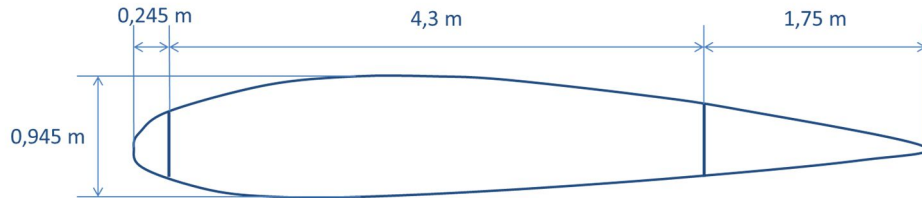


*Figura 3.4. Sección modelo 4.*

- Modelo 4A: El espesor es de 25 mm constante en toda la sección.
- Modelo 4B: Dispone de 7 costillas situadas equidistantes de 4 mm de espesor. El modelo estaba formado por dos espesores diferentes, uno de 17,5 mm situado en la superficie inferior y superior y otro de 10 mm situado en los tramos que dividen las celdas, la sección triangular de la derecha y el tramo semicircular de la izquierda.

### **MODELO 5**

Este modelo se analizó únicamente mediante MEF por su complejidad geométrica. El perfil de este modelo es un perfil NACA 2415. Las dimensiones globales del modelo son 15 m de longitud, 6,3 m de anchura y X m de altura (figura 3.5).



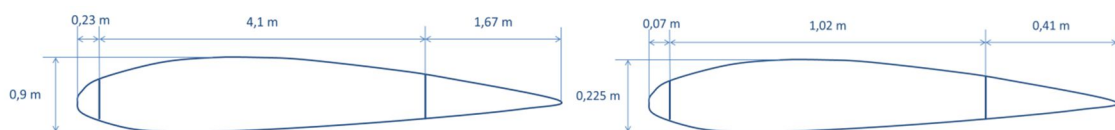
*Figura 3.5. Sección modelo 5 (perfil NACA 2415).*

Los modelos 5A y 5B tenían la misma distribución de espesores y costillas (7 situadas de forma equidistante). Los modelos tenían un espesor de 4 mm en las costillas, 17,5 mm en las superficies superior e inferior de la zona central y 10 mm en las superficies de las zonas laterales y verticales (2 superficies que dividen el perfil en tres secciones). En el apartado 5 (modelos en detalle) se explica en detalle el modelo 5.

### **MODELO 6**

Este modelo tenía las dimensiones y formas reales correspondientes al ala del Airbus A320. A continuación se ha hecho un pequeño resumen de las características principales, en el apartado 5 (modelos en detalle) se explica en detalle el modelo.

El perfil del modelo 6 corresponde a un perfil NACA 2415 pero las dimensiones de este no eran constantes al variar la forma del ala. En la figura 3.6 se muestra las dimensiones del perfil para la zona del encastré y la punta del ala.



*Figura 3.6. Sección modelo 6 en el encastré (izquierda) y en la punta del ala (derecha).*

- Modelo 6A: La configuración de espesores es igual al modelo 5.
- Modelo 6B: Se ha realizado una configuración de espesores en las que estos iban disminuyendo desde el encastré a la punta del ala. En el apartado 5 (modelos en detalle) se explica detalladamente.

### **3.2.-CARGA APLICADA**

Según las especificaciones técnicas que aporta Airbus en su manual, el peso máximo en despegue de un A320 es de 78000kg, por lo que cada ala deberá de ejercer una fuerza de sustentación de 39000kg para permitir al avión mantenerse en vuelo.

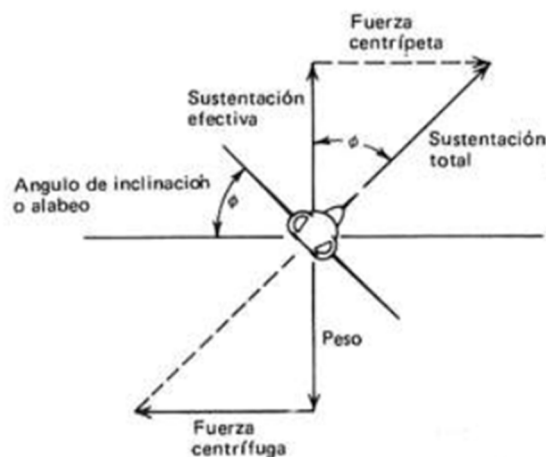
Este valor sería válido si el avión no realizase ningún tipo de maniobra como virajes, descensos, ascensos, etc y tuviese siempre un vuelo recto. Como esto no sucede en la realidad es necesario aplicar unos factores de carga, los cuales nos dan las fuerzas reales a las que esta sometida el ala. Con el valor real de la carga se procedió al cálculo del diseño de la misma.

#### **FACTORES DE CARGA**

Cualquier fuerza aplicada a un avión para desviar su trayectoria de vuelo recto, produce un esfuerzo en su estructura cuya magnitud se denomina factor de carga. El factor de carga es la relación entre la carga de aire total sobre la estructura del avión (sustentación) y el peso bruto del avión ( $FC = L/W$ ). Por ejemplo, un factor de carga de tres significa que la carga total sobre la estructura del avión es tres veces mayor a su peso bruto.

Los factores de carga son expresados generalmente en términos de “g” (gravedad). Cuando un avión está expuesto a 3 g’s en una trepada por ejemplo, el piloto o sus pasajeros serán comprimidos sobre sus asientos con una fuerza igual a 3 veces sus propios pesos. Los factores de carga son importantes para el piloto, debido a la posibilidad de imponer una sobrecarga peligrosa a la estructura del avión y también porque un factor de carga elevado incrementa la velocidad de pérdida.

Los vuelos en virajes y maniobras producen un efecto en la velocidad de pérdida el cual es similar al efecto del peso. Un viraje coordinado exige que la componente vertical de la sustentación sea igual al peso del avión y la componente horizontal sea igual a la fuerza centrífuga, podemos verlo en la figura 3.7. De ésta manera el avión en un giro coordinado desarrolla una sustentación mayor a su peso y como resultado experimenta un aumento en la velocidad de pérdida.



*Figura 3.7. Fuerzas sobre un avión en un viraje coordinado.*

El incremento en el porcentaje de la velocidad de pérdida y el incremento del factor de carga, ambos durante el viraje son mostrados en la figura 3.8. Estos valores son válidos para cualquier avión.

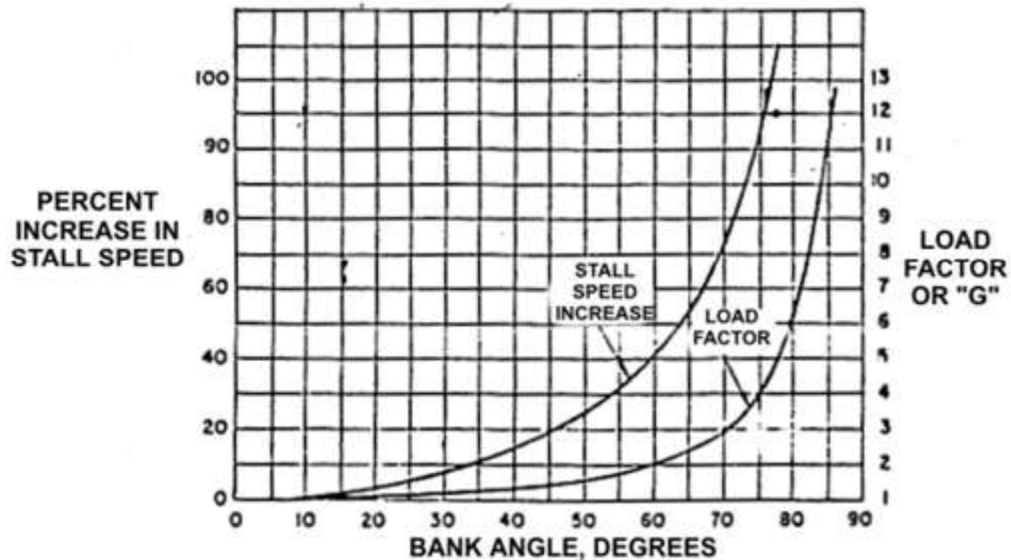


Figura 3.8. Factor de carga e incremento de la velocidad de pérdida.

La figura 3.8 muestra que no existe un cambio apreciable en el factor de carga o en la velocidad de pérdida con un ángulo de rolido menor a 30°, pero con ángulos superiores a 45° el incremento del factor de carga y la velocidad de pérdida es bastante rápido (figura 3.9).

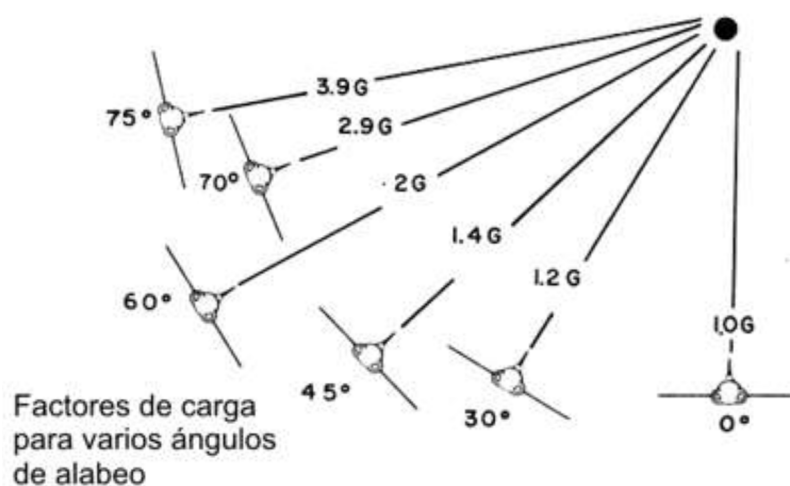


Figura 3.9. Factor de carga en función de los ángulos de alabeo.

Con estos datos se supuso que un A320 no realizara un viraje que implique una inclinación mayor que 70º, por lo que estará sometido a una fuerza máxima de 3 g's.

Por ultimo como sucede en cualquier ámbito de la ingeniería que implique el cálculo y diseño de estructuras, piezas o conjuntos mecánicos es necesario aplicar un coeficiente de seguridad. Para nuestro caso fue de un 50% al tratarse de la parte principal del avión y más crítica.

Con todas estas hipótesis y datos, la fuerza que se utilizó para el diseño del Ala fue de 171000 Kg (3.1).

- Fuerza de sustentación en vuelo recto (L): 38000kg
- Factor de carga (FC): 3
- Factor de seguridad (FS): 50%

$$F_{TOTAL} = L \cdot FC \cdot FS = 38000 \cdot 3 \cdot 1,5 = 171000 \text{ Kg} \quad (3.1)$$

Una vez que se ha calculado la fuerza que soporta el ala se explica cómo se ha distribuido sobre el ala dicha fuerza para realizar los cálculos correspondientes en los diferentes modelos.

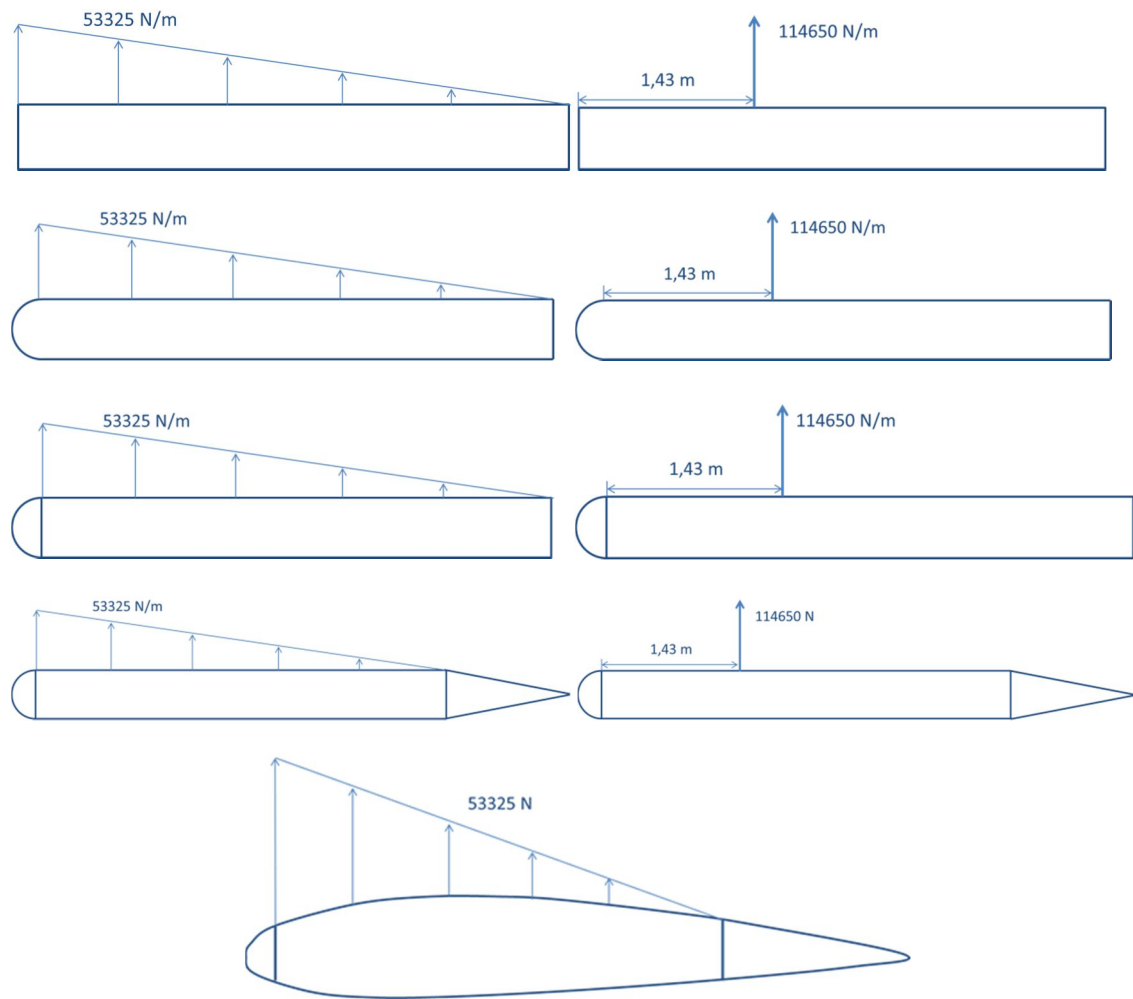
En los modelos 1, 2, 3, 4, 5A la carga se colocó de la misma manera, mientras que en los modelos 5B y 6 se realizó una distribución totalmente diferente asemejándose más a la realidad.

Los modelos 1, 2, 3, 4, 5A eran simplificaciones del ala, por lo que la distribución de la presión que se aplicó también es una simplificación. Se sabe que por la especial forma de la sección de un ala y por el ángulo de ataque que tiene, la distribución de la presión sobre ella no es uniforme y no está centrada, generando un momento torsor que tiende a girar el ala en su eje longitudinal. A esto hay que sumarle la deformación debida a la flexión.

Para asemejar en cierta medida la no uniformidad de la presión aplicada sobre el ala y la generación de un momento torsor, se aplicó la carga de forma triangular sobre la cara superior de la sección. Con esto se consiguió el efecto deseado de tener una carga sobre el ala no centrada. En los modelos del 1, 2, 3 y 4 la aplicación era exactamente igual ya que siempre se produce sobre la misma superficie. En el caso del modelo 5A la aplicación era prácticamente igual a los cuatro modelos ya que la carga se aplica sobre la superficie superior de la sección central. La fuerza triangular que se tiene era de 53325 N/m, equivalente a una fuerza puntual de 114650 N/m aplicada a 1,43 m del extremo izquierdo (figuras 3.10).

La aplicación de la presión en los modelos 5B y 6 se realizó sobre la superficie del intradós y extradós (figura 3.11). Los valores y distribución exacta se explica detalladamente en el apartado 5.2 (Distribución de la presión).





Figuras 3.10. Distribución de la fuerza en los modelos 1, 2, 3, 4 y 5A.

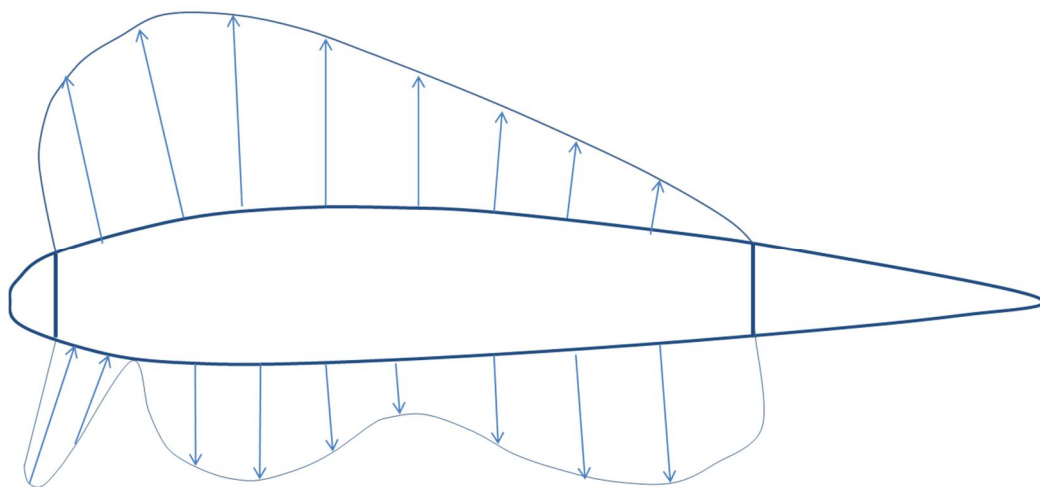


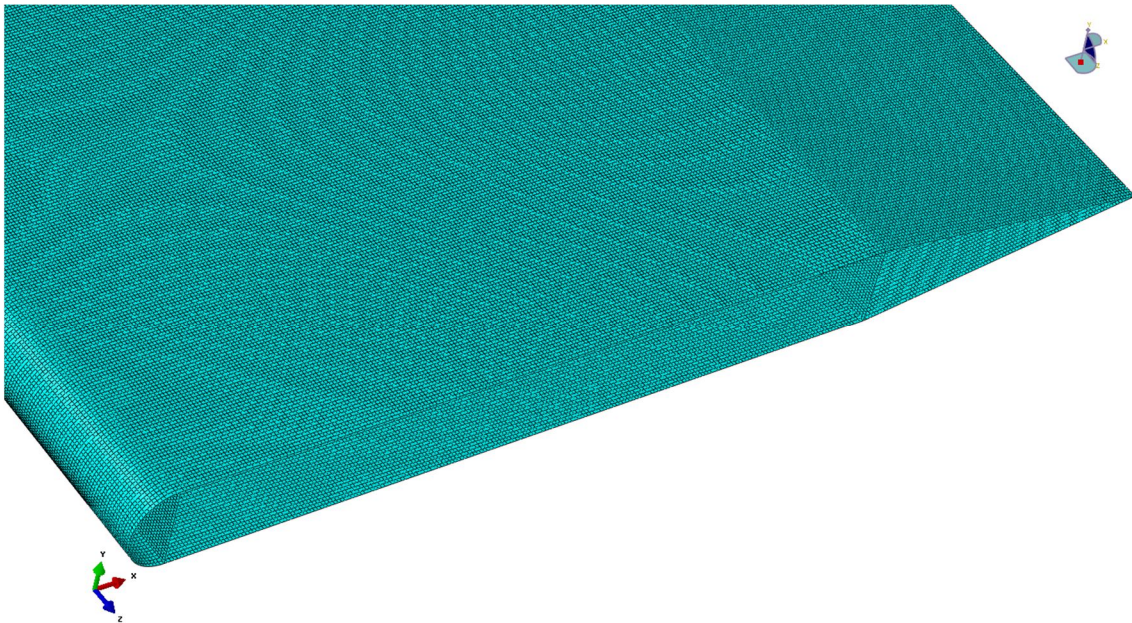
Figura 3.11. Distribución de presiones en los modelos 5B y 6.

### **3.3.-MODELOS MEF**

Para la modelización y análisis mediante MEF se ha utilizado el software Abaqus 6.12, el cual ya se ha comentado en el apartado 2 (Antecedentes).

Los modelos se han realizado mediante la técnica “Shell” que permite crear modelos donde la relación de aspecto entre las dimensiones globales y el espesor es muy grande. Esto simplifica el cálculo al no tomar elementos tridimensionales sino bidimensionales. Al ser elementos “Shell” se han utilizado elementos cuadriláteros lineales de integración reducida correspondientes al tipo S4R.

El tipo de mallado utilizado ha sido estructurado, permitiendo tener una malla perfectamente ordenada y con elementos todos del mismo tamaño, lo que evita distorsiones en los resultados debido a efectos de forma de la malla (figura 3.12).



*Figura 3.12. Ejemplo de distribución y tamaño de la malla para el modelo 4.*

El tamaño de elemento usado ha sido de 2 cm, el cual permite obtener un buen compromiso entre la precisión de los resultados y el tiempo de cálculo. A mayor tamaño de la malla la precisión empieza a ser más pobre y a menor tamaño la precisión no varía significativamente, pero si se produce un aumento considerable del tiempo de cálculo.

Por último, las condiciones de contorno que se han aplicado han sido las de encastre o empotramiento en un extremo, lo que impide cualquier desplazamiento o giro, y una presión que varía triangularmente en la cara superior (extradós) para los modelos 1, 2, 3, 4 y 5A. Para los modelos 5B y 6 se aplica una presión en el extradós e intradós. La distribución de la misma se ha explicado detalladamente en el apartado 5 (Modelos en detalle).

## **4.-MODELOS SIMPLIFICADOS**

En este apartado se exponen y explican todos los cálculos realizados analíticamente y mediante MEF de los modelos 1, 2, 3 y 4.

Para simplificar la exposición de los cálculos analíticos se ha intentado no repetir aquellos cálculos que son comunes en más de un modelo. Con este motivo el primer modelo que requiere de un cálculo no explicado anteriormente se expone y explica detalladamente. En los modelos posteriores que requieren de un cálculo idéntico, únicamente se expone el resultado final, ya que el desarrollo es igual al del modelo previo.

El orden que se ha seguido en la exposición de los cálculos es casi idéntico en todos los modelos. Las diferencias que hay entre modelos son derivadas de la necesidad del cálculo de un dato, el cual solo es necesario en determinados modelos. A continuación se expone el orden que se sigue en el cálculo de los diferentes datos relativos a cada modelo.

- ❖ Cálculo del espesor.
- ❖ Flecha y tensión normal.
  - Modelo A.
  - Modelo B.
- ❖ Cortantes.
  - Cálculo general.
    - ◆ Cortante debido a la carga vertical.
      - Secciones cerradas (Cuando la sección tiene más de una celda).
    - ◆ Centro de cortantes (Cuando el modelo no es simétrico).
    - ◆ Cortante debido al momento torsor.
  - Cálculo concreto.
    - ◆ Modelo A.
    - ◆ Modelo B.
- ❖ 4.- Discusión de resultados del modelo.

## 4.1.-MODELO 1

A continuación se han detallado los cálculos realizados para la obtención de las diferentes tensiones, deformaciones y espesores para el primer modelo, formado por una sección rectangular (figura 4.1).

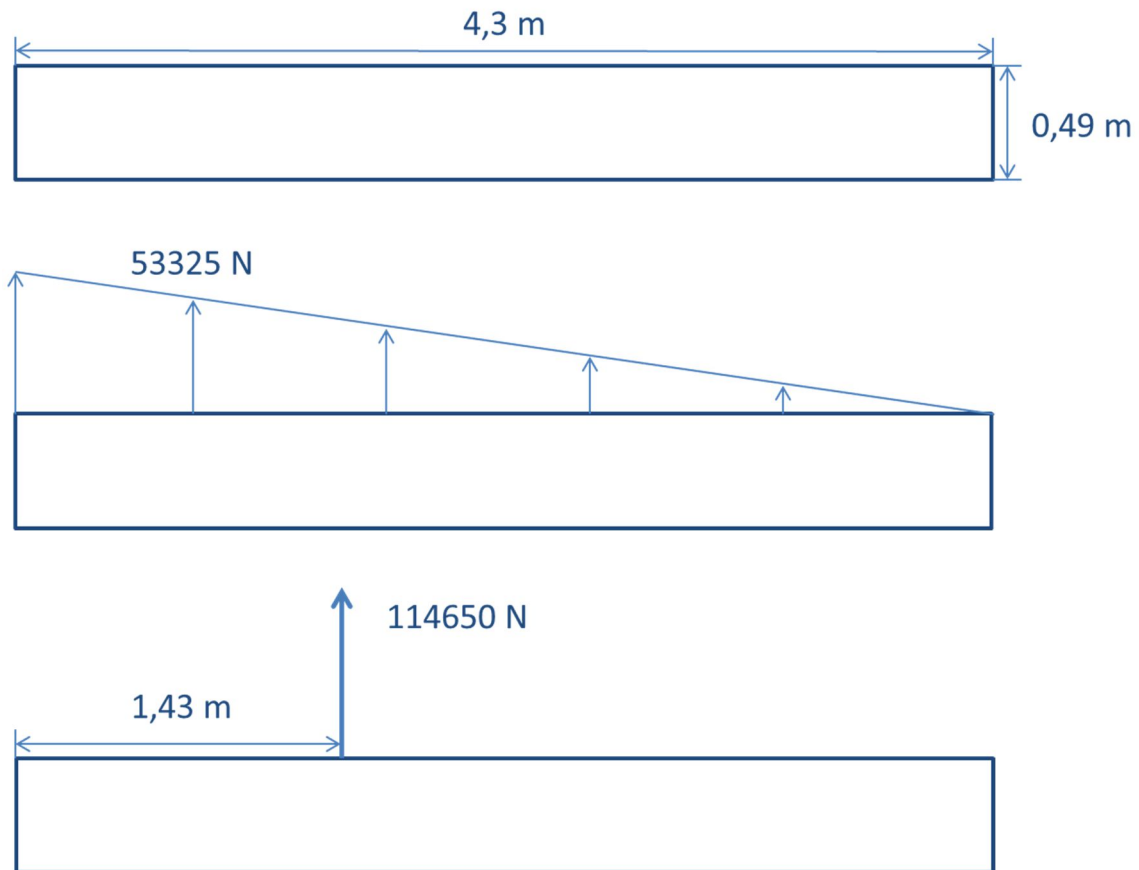


Figura 4.1. Sección acotada y distribución de la carga del modelo 4.

### 4.1.1.- CÁLCULO DEL ESPESOR

Para calcular el espesor mínimo teórico que tiene que tener la sección del ala se partió de dos premisas que nos limitan el diseño de la misma.

La primera premisa fue la flecha máxima admisible en la punta del ala, que en este caso era un 16% de la longitud del ala. Con esta premisa se calculó el momento de inercia en x (4.1).

$$\text{Flecha máxima} = 16\% \rightarrow 2,4m$$

$$F_{max} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} \rightarrow I_x = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot F_{max}} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 2,4} = 4,198 \cdot 10^{-3} m^4 \quad (4.1)$$

La segunda premisa fue la tensión de rotura del aluminio, que en este caso fue de 490 MPa. Con esta premisa se ha calculó el momento de inercia en x (4.2).

$$\sigma_{emp} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} \rightarrow I_x = \frac{y \cdot M_x}{\sigma_{emp}} = \frac{0,245 \cdot 12898800}{490 \cdot 10^6} = 6,449 \cdot 10^{-3} m^4 \quad (4.2)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 15^2}{2} = 12898800 N \cdot m \quad (4.3)$$

Se utilizó el valor del momento de inercia más restrictivo para el cálculo del espesor (4.4). En este caso el más restrictivo fue el debido a la tensión de rotura del aluminio ( $6,449 \cdot 10^{-3} m^4$ ).

$$I_x = 2 \cdot \left( \frac{1}{12} \cdot e \cdot 0,49^3 \right) + 2 \cdot (e \cdot 4,3 \cdot 0,245^2) = 0,5358 \cdot e \quad (4.4)$$

$$e = 0,012 m$$

#### **4.1.2.- FLECHA Y TENSIÓN NORMAL**

En este apartado se calculó la flecha en la punta del ala y la tensión normal en la mitad de la longitud del ala. Se realizó de esta forma para evitar la distorsión de los resultados debido a peculiaridades o singularidades que se podían producir en el modelo MEF en la zona del empotramiento.

##### **Modelo 1A**

Este primer modelo se corresponde al de espesor constante, por lo que debido a la concentración de la carga que se producía en la cara superior del perfil, el espesor de 12mm no era suficiente y fue necesario aumentarlo hasta 36mm para asegurarse que se encontraba dentro de los límites de rotura del aluminio.

$$e = 0,036 m$$

$$I_x = 0,01929 m^4$$

El primer paso fue calcular la flecha en la punta del ala (4.5).

$$Flecha = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 0,01929} = 0,522 m \quad (4.5)$$

El segundo paso se calculó la tensión normal a 7,5 m del empotramiento, es decir en la mitad del ala (4.6).

$$\sigma_{7,5m} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} = \frac{0,245 \cdot 3224531}{0,01929} = \mathbf{40,9 \text{ MPa}} \quad (4.6)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 7,5^2}{2} = 3224531 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.7)$$

Una vez se realizaron los cálculos analíticos se procedió a obtener los resultados del modelo MEF.

La flecha que se obtuvo en el centro de la sección de la punta del ala fue de 0,564 m y la flecha máxima fue de 0,692 m, la cual corresponde a la cara superior, como se puede ver en la figura 4.2.

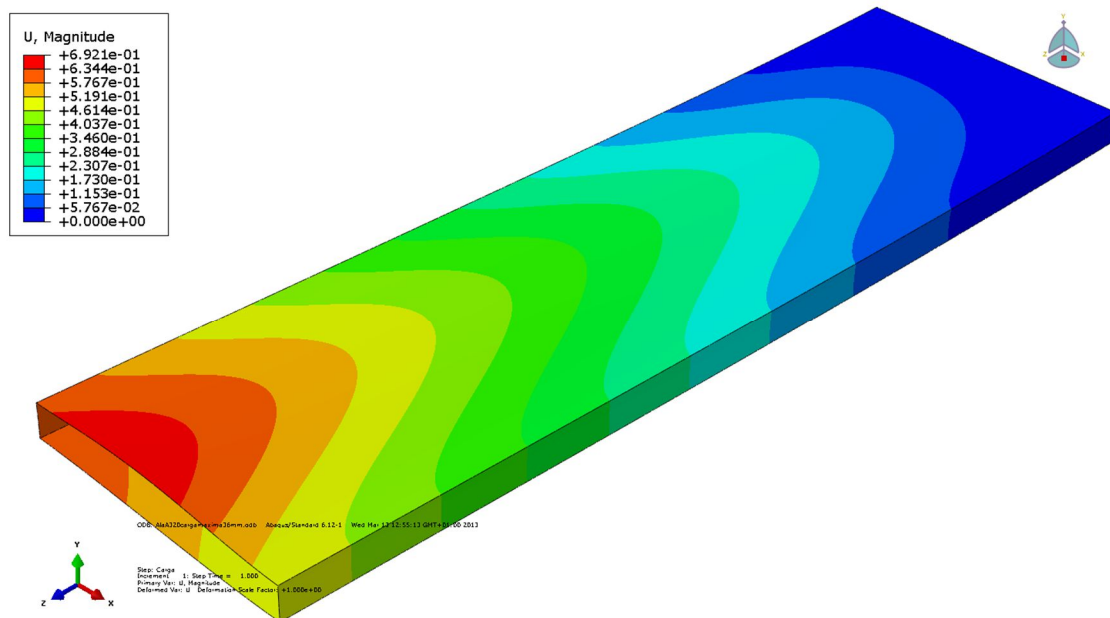


Figura 4.2. Deformada del modelo 1A MEF.

La tensión normal a 7,5 m del empotramiento que se obtuvo fue de 42,3 MPa en la cara inferior y 79,3 MPa en la superior como se puede ver en la figura 4.3.

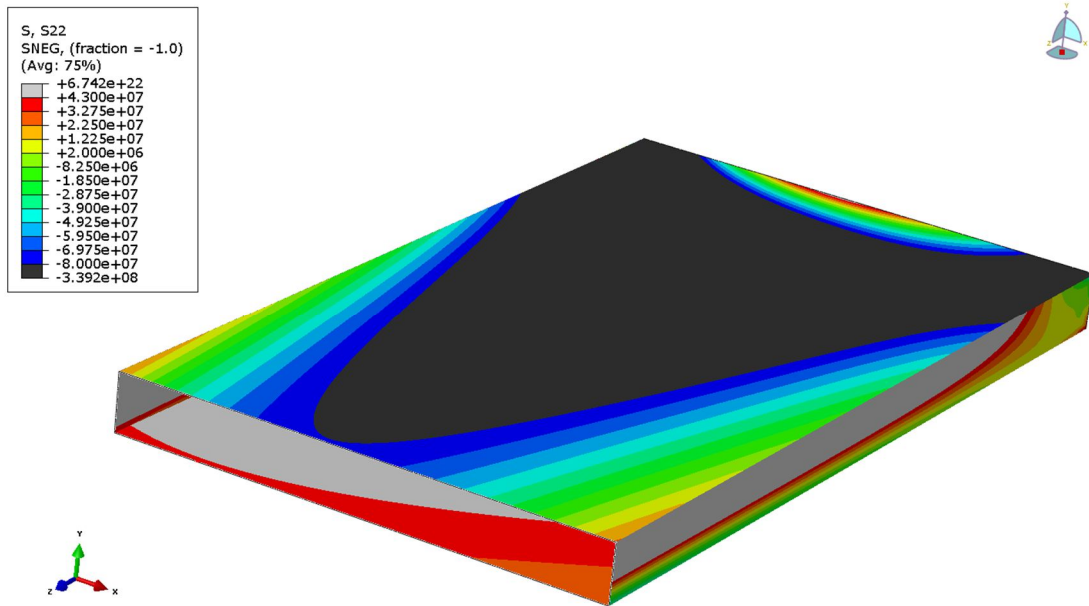


Figura 4.3. Distribución de tensiones normales sobre la mitad del modelo 1A MEF.

### **Modelo 1B**

Este modelo para aumentar la rigidez y minimizar los efectos de aplicar la carga sobre la cara superior, se colocaron 7 costillas de 4mm de espesor a lo largo de toda la longitud a una distancia equidistante unas de otras.

Debido a la introducción de las costillas no fue necesario mantener un espesor de 36 mm en toda la sección y se pudo ajustar el espesor lo máximo posible a los 12 mm. Con estas premisas se colocó un espesor de 12mm en las caras laterales y de 18 mm en las caras superior e inferior.

$$e_1 = 0,012 \text{ m}$$

$$e_2 = 0,018 \text{ m}$$

$$I_x = 9,52 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Al igual que en el modelo 1B se calculó primero la flecha (4.8).

$$Flecha = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 9,52 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{1,058 \text{ m}} \quad (4.8)$$

$$\sigma_{7,5m} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} = \frac{0,245 \cdot 3224531}{9,52 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{82,9 \text{ MPa}} \quad (4.9)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 7,5^2}{2} = 3224531 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.10)$$

U, Magnitude

|   |           |
|---|-----------|
| + | 1.178e+00 |
| + | 1.080e+00 |
| + | 9.818e-01 |
| + | 8.836e-01 |
| + | 7.854e-01 |
| + | 6.872e-01 |
| + | 5.891e-01 |
| + | 4.909e-01 |
| + | 3.927e-01 |
| + | 2.945e-01 |
| + | 1.964e-01 |
| + | 9.818e-02 |
| + | 0.000e+00 |

OC6: Ala320dargame18-18m00000000 Alaqu/Standard 6.12-1 Tue Mar 28 11:37:25 GMT+01:00 2012

Step: Carg  
 Increment: 1; Step Time = 1.000  
 Primary Var: U, Magnitude  
 Deformed Var: U, Deformation Scale Factor: +1.000e+00

Como se puede ver en la figura 4.5 la tensión normal a 7,5 m del empotramiento fue de 84,2 MPa en la cara inferior y de 199 MPa en la superior.



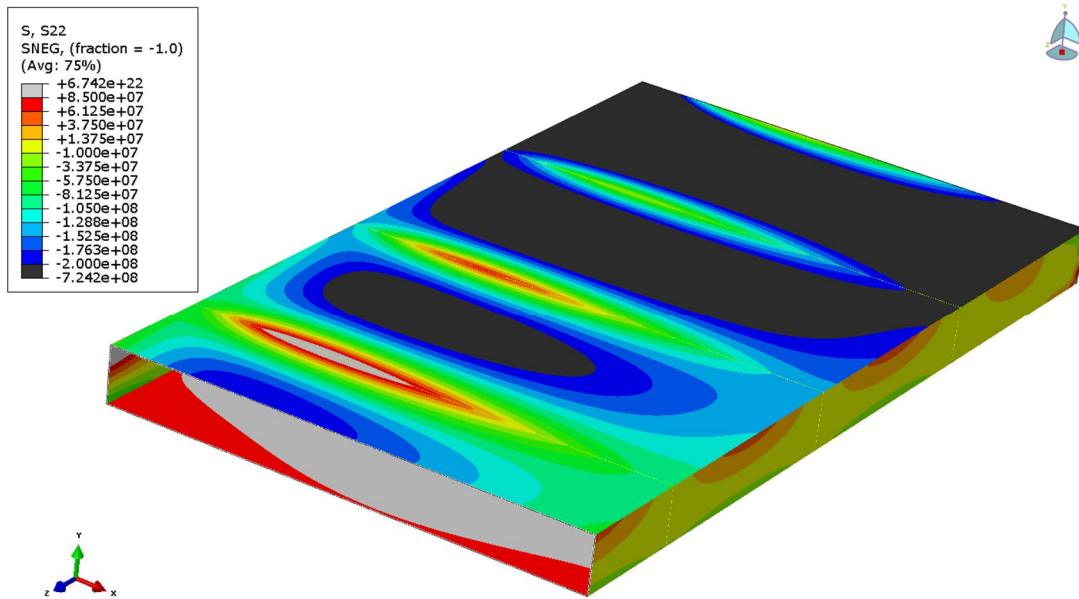


Figura 4.5. Distribución de tensiones normales sobre la mitad del modelo 1B MEF.

#### 4.1.3.- CORTANTES

##### - CÁLCULO GENERAL

El esfuerzo cortante que sufre la sección es debido a la carga vertical aplicada y al momento torsor que genera esta carga vertical al no estar centrada.

##### Cortante debido a la carga vertical

Para calcular los esfuerzos cortantes que se producen en la sección debido a la carga vertical se siguió la ecuación 4.11, la cual dice que el esfuerzo cortante total es la suma del esfuerzo cortante de la sección abierta (4.12) y la sección cerrada (4.15).

$$q(s) = q_a(s) + q(0) \quad (4.11)$$

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y + K_x \cdot Q_x = -K_y \cdot Q_y \quad (4.12)$$

$$K_y = \frac{m_{ex}^* \cdot I_y - m_{ey}^* \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} = \frac{m_{ex}^*}{I_x} \quad (4.13)$$

$$m_{ex}^* = \int_A y(s) \cdot dA = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds \quad (4.14)$$

$$q(0) = -\frac{\int_0^s \frac{q(s)_{open}}{G \cdot e(s)} \cdot ds}{\int_0^s \frac{1}{G \cdot e(s)} \cdot ds} \quad (4.15)$$

Para el cálculo del esfuerzo cortante en la sección abierta se dividió en tramos la sección total como se ve en la figura 4.6.



Figura 4.6. Distribución de los tramos en la sección del modelo 4.

A continuación se pasó a calcular el esfuerzo cortante en la sección abierta en cada tramo. A su vez se calculó también la integral de dicho esfuerzo que posteriormente se utilizaría en el cálculo del esfuerzo cortante de la sección cerrada.

#### TRAMO 1-2

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.16)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{s^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.17)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s^3 \cdot e_1}{6} \quad (4.18)$$

#### TRAMO 2-3

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_1}{2} \right] \quad (4.19)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_1}{2} \quad (4.20)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_1^2}{4} \right] \quad (4.21)$$

#### TRAMO 3-4

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} + \frac{e_1 \cdot s_2}{2} \cdot (h - s_2) \right] \quad (4.22)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} + \frac{e_1 \cdot s_2}{2} \cdot (h - s_2) \quad (4.23)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_2}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b \cdot s_2}{2} + \frac{e_1 \cdot s_2^2 \cdot h}{4} - \frac{e_1 \cdot s_2^3}{6} \right] \quad (4.24)$$

#### TRAMO 4-5.

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} - \frac{e_2 \cdot h \cdot s_3}{2} \right] \quad (4.25)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} - \frac{e_2 \cdot h \cdot s_3}{2} \quad (4.26)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_3}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b \cdot s_3}{2} - \frac{e_2 \cdot h \cdot s_3^2}{4} \right] \quad (4.27)$$

#### TRAMO 5-6

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{e_1 \cdot s_4}{2} \cdot (s_4 - h) \right] \quad (4.28)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{e_1 \cdot s_4}{2} \cdot (s_4 - h) \quad (4.29)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_4}{8} + \frac{e_1 \cdot s_4^3}{6} - \frac{e_1 \cdot h \cdot s_4^2}{4} \right] \quad (4.30)$$

#### Cortante debido al momento torsor

Para el cálculo del cortante debido al momento torsor se utilizó la ecuación 4.31.

$$\tau = \frac{M_T}{2 \cdot \Omega \cdot e_{min}} = \frac{Q_y \cdot x}{2 \cdot (h \cdot b) \cdot e_{min}} \quad (4.31)$$

**- CÁLCULO CONCRETO**

**Modelo 1A**

Una vez se obtuvieron las fórmulas de los esfuerzos cortantes, se calculó el valor de los cortantes teniendo en cuenta el espesor y las medidas de la sección.

$$\text{Tramo 1-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 1,0804 \cdot 10^{-3} \quad (4.32)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 8,8237 \cdot 10^{-5} \quad (4.33)$$

$$\text{Tramo 2-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,039 \quad (4.34)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,08618 \quad (4.35)$$

$$\text{Tramo 3-4: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,039 \quad (4.36)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,02 \quad (4.37)$$

$$\text{Tramo 4-5: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 1,0804 \cdot 10^{-3} \quad (4.38)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,08618 \quad (4.39)$$

$$\text{Tramo 5-6: } q_a(s) = 0 \quad (4.40)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 8,8237 \cdot 10^{-5} \quad (4.41)$$

Con los valores obtenidos para los esfuerzos de la sección abierta se creó el diagrama de esfuerzos cortantes (figura 4.7).

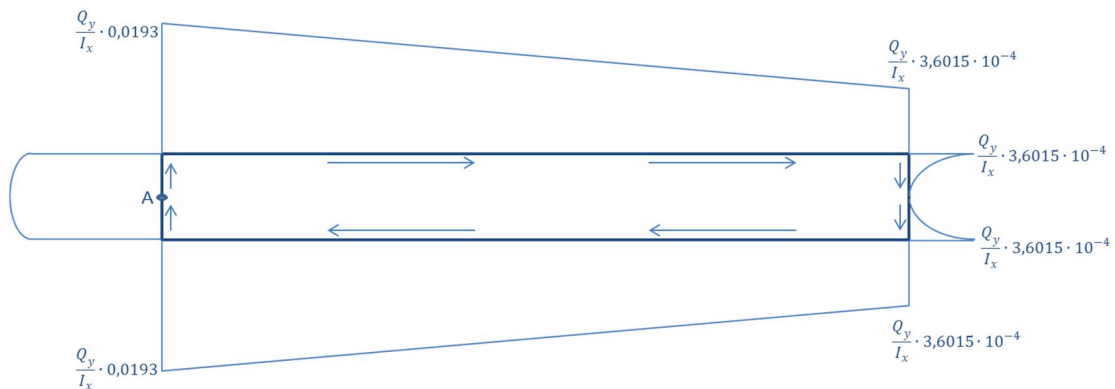


Figura 4.7. Diagrama de esfuerzos cortantes de la sección abierta del modelo 1A.

Una vez se calculó el esfuerzo cortante de la sección abierta se calcula el correspondiente para la sección cerrada (4.42).

$$q(0) = -\frac{\int_0^s \frac{q(s)_{open}}{G \cdot e(s)} \cdot ds}{\int_0^s \frac{1}{G \cdot e(s)} \cdot ds} = -\frac{\int_0^{2 \cdot (h+b)} q_a(s) \cdot ds}{2 \cdot (h+b)} = -\frac{-\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,1925}{9,58} = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,02 \quad (4.42)$$

Con el esfuerzo cortante de la sección cerrada calculado, se sumó al de la sección abierta y se obtuvo el diagrama completo de esfuerzos cortantes debido a la carga vertical (figura 4.8).

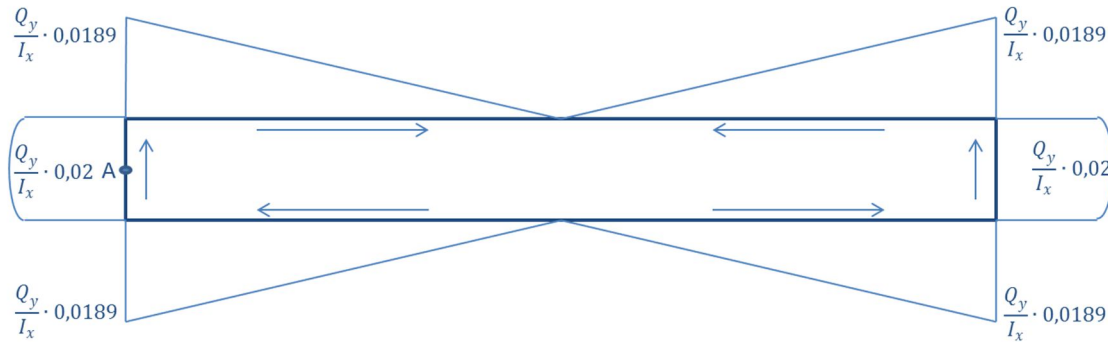


Figura 4.8. Diagrama de esfuerzos cortantes debido a la carga vertical del modelo 1A.

Por último se calculó el esfuerzo cortante debido al momento torsor (4.43) y se sumó al esfuerzo cortante debido a la carga vertical, obteniendo el esfuerzo cortante máximo, el cual se produjo en el punto A (4.44).

$$\tau_{7,5} = \frac{Q_y \cdot x}{2 \cdot (h \cdot b) \cdot e_{min}} = \frac{859950 \cdot 0,7166}{2 \cdot (4,3 \cdot 0,49) \cdot 0,036} = 4,06 \text{ MPa} \quad (4.43)$$

$$A = 24,77 \text{ MPa} + 4,06 \text{ MPa} = 28,83 \text{ MPa} \quad (4.44)$$

Con los resultados analíticos calculados se obtuvieron el esfuerzo cortante máximo del modelo 1A MEF, que fue de 30,2 MPa como se ve en la figura 4.9.

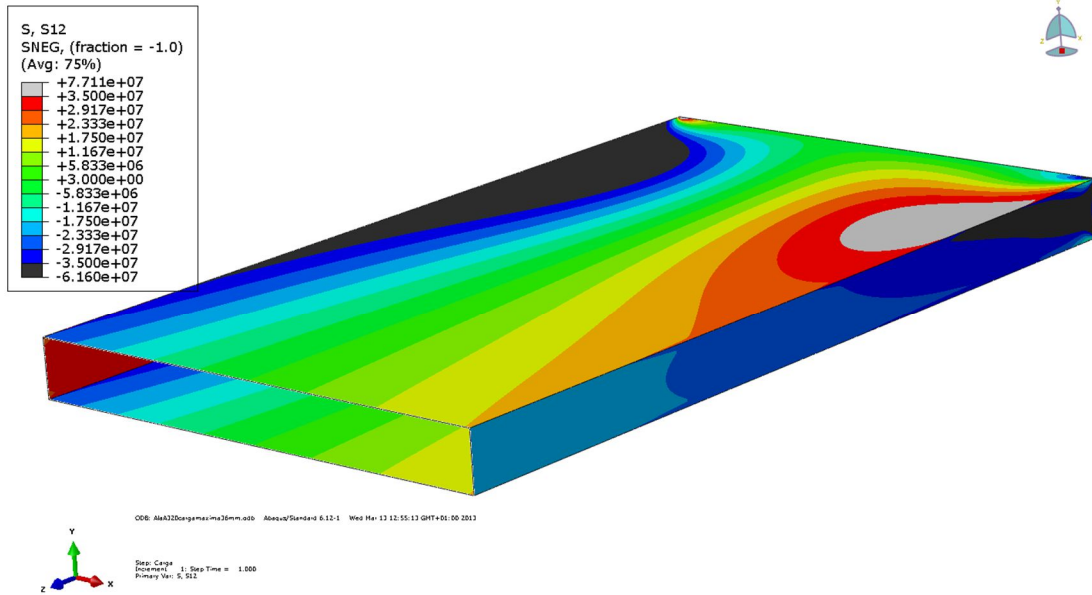


Figura 4.9. Esfuerzos cortantes en la mitad del modelo 1A MEF.

### Modelo 1B

Al igual que en el modelo 1A se calcularon los valores de los esfuerzos cortantes utilizando las fórmulas obtenidas anteriormente y teniendo en cuenta los espesores y medidas de la sección del modelo 1B.

$$\text{Tramo 1-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,6015 \cdot 10^{-4} \quad (4.45)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,9412 \cdot 10^{-5} \quad (4.46)$$

$$\text{Tramo 2-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0193 \quad (4.47)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0423 \quad (4.48)$$

$$\text{Tramo 3-4: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0193 \quad (4.49)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 9,586 \cdot 10^{-3} \quad (4.50)$$

$$\text{Tramo 4-5: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,6015 \cdot 10^{-4} \quad (4.51)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0423 \quad (4.52)$$

Tramo 5-6:  $q_a(s) = 0$  (4.53)

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,9412 \cdot 10^{-3} \quad (4.54)$$

El diagrama de esfuerzos cortantes tendría la misma distribución que en el modelo 1A pero con los valores calculados en este apartado. Se calculó el esfuerzo de la sección cerrada al igual que en el modelo 1A (4.55).

$$\begin{aligned} q(0) &= -\frac{\int_0^s \frac{q(s)_{open}}{G \cdot e(s)} \cdot ds}{\int_0^s \frac{1}{G \cdot e(s)} \cdot ds} = -\frac{\int_0^{2 \cdot (h+b)} q_a(s) \cdot ds}{2 \cdot (h+b)} = -\frac{-\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0942}{9,58} \\ &= \frac{Q_y}{I_x} \cdot 9,8377 \cdot 10^{-3} \quad (4.55) \end{aligned}$$

Para terminar se calculó el esfuerzo cortante debido al momento torsor (4.56) y se sumó al esfuerzo cortante debido a la carga vertical, obteniendo el esfuerzo cortante máximo que se produjo en el punto A (4.57) como ya se indicó anteriormente.

$$\tau_{7,5} = \frac{Q_y \cdot x}{2 \cdot (h \cdot b) \cdot e_{min}} = \frac{859950 \cdot 0,7166}{2 \cdot (4,3 \cdot 0,49) \cdot 0,012} = 12,18 \text{ MPa} \quad (4.56)$$

$$A = 73,99 \text{ MPa} + 12,18 \text{ MPa} = 86,17 \text{ MPa} \quad (4.57)$$

Al igual que en el modelo 1A se obtuvieron los esfuerzos cortantes del modelo 1B mediante MEF. Como se puede ver en la figura 4.10 el valor máximo fue de 85,11 MPa.

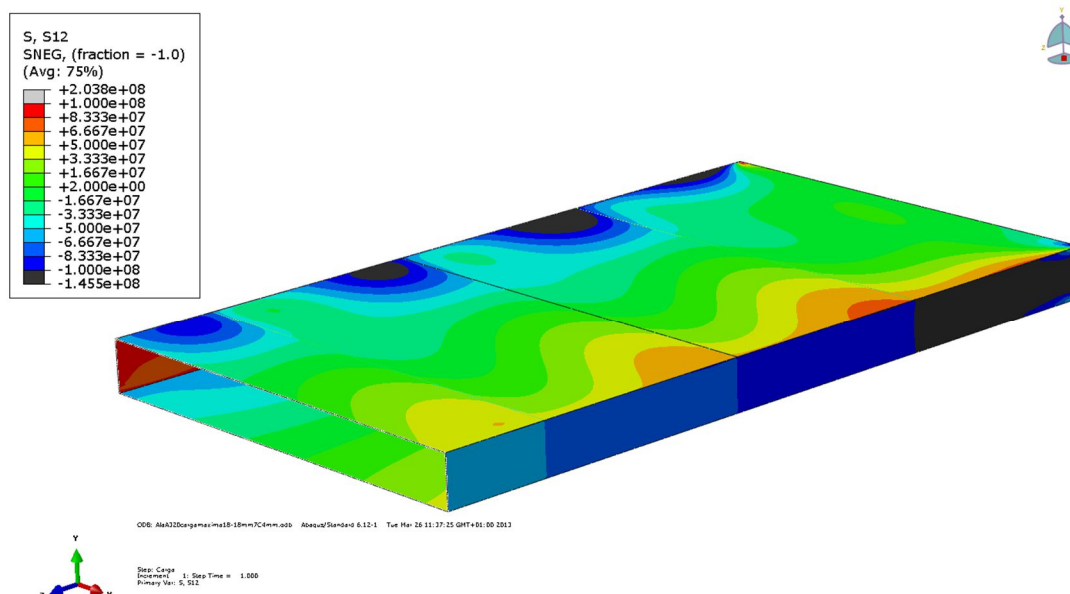


Figura 4.10. Esfuerzos cortantes en la mitad del modelo 1B MEF.

#### 4.1.4.- DISCUSIÓN DE RESULTADOS DEL MODELO 1

Como se puede observar en la tabla 4.1, se tienen valores obtenidos mediante MEF muy próximos a los obtenidos analíticamente, en especial las tensiones normales en la cara inferior. En cambio se tienen otros valores muy superiores a los calculados analíticamente.

En el caso de la flecha en la cara superior del modelo 1A MEF es debido a que en ella esta aplicada toda la carga y por tanto sufre una deformación mucho más acusada. El modelo 1B MEF no sufre este fenómeno debido a que dispone de costillas que rigidizan la estructura y minimizan estos efectos de concentración de deformaciones.

Las tensiones normales especialmente altas en la cara superior son debidas al mismo fenómeno de concentración de la carga que en el caso de la flecha.

Se puede observar que el efecto de las costillas provoca un gran aumento de la rigidez añadiendo únicamente un 10% de superficie de material. Esto permite optimizar la cantidad de material usado y por consiguiente un ahorro de peso. En el caso de este modelo tenemos una reducción del 50%.

|               | FLECHA (m)    | ERROR  | $\sigma$ (MPa) | ERROR  | $\tau$ (MPa) | ERROR | PESO (Kg) | SUPERFICIE (m <sup>2</sup> ) |
|---------------|---------------|--------|----------------|--------|--------------|-------|-----------|------------------------------|
| MODELO 1A     | 0,522         | 8%     | 40,9           | 3,40%  | 28,33        | 4,75% | 13967     | 143,7                        |
| MODELO 1A MEF | 0,564 / 0,692 | 32,50% | 42,3 / 79,3    | 93,88% | 30,2         |       |           |                              |
| MODELO 1B     | 1,058         | 8,70%  | 82,9           | 1,56%  | 86,17        | 1,25% | 6904      | 158,5                        |
| MODELO 1B MEF | 1,15          |        | 84,2 / 199     | 140%   | 85,11        |       |           |                              |

Tabla 4.1. Datos del modelo 1.



## 4.2.-MODELO 2

Este segundo modelo es una modificación del anterior, en el que se sustituyó el lado izquierdo que era una sección recta por una sección semicircular (figura 4.11).

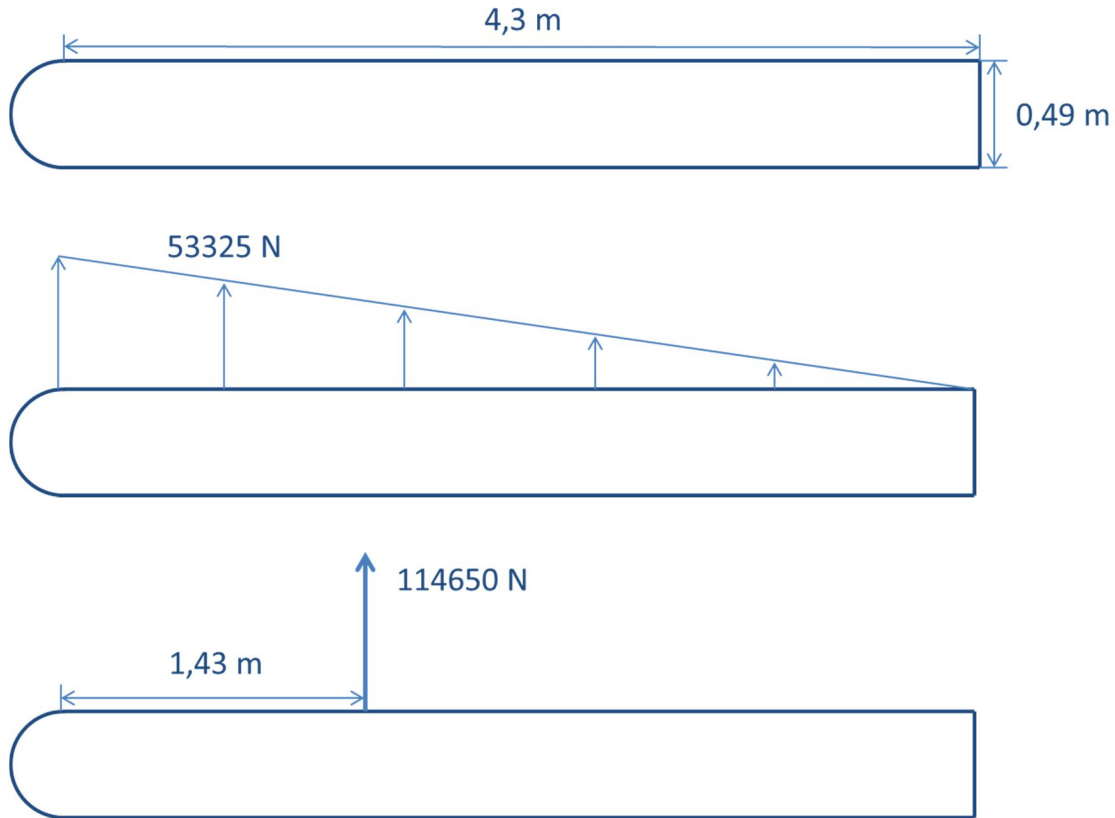


Figura 4.11. Sección acotada y distribución de la carga del modelo 2.

### 4.2.1.- CÁLCULO DEL ESPESOR

Para el cálculo del espesor se siguió el mismo proceso que se realizó para el modelo 1, teniendo en cuenta una flecha máxima del 16% (4.58) y una tensión de rotura del aluminio de 490 MPa (4.59).

$$\text{Flecha máxima} = 16\% \rightarrow 2,4m$$

$$F_{max} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} \rightarrow I_x = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot F_{max}} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 2,4} = 4,198 \cdot 10^{-3} m^4 \quad (4.58)$$

$$\sigma_{emp} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} \rightarrow I_x = \frac{y \cdot M_x}{\sigma_{emp}} = \frac{0,245 \cdot 12898800}{490 \cdot 10^6} = 6,449 \cdot 10^{-3} m^4 \quad (4.59)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 15^2}{2} = 12898800 N \cdot m \quad (4.60)$$

Con los momentos de inercia una vez calculados se obtuvo el espesor teórico que tiene la sección (4.61).

$$I_x = \left( \frac{1}{12} \cdot e \cdot 0,49^3 \right) + 2 \cdot (e \cdot 4,3 \cdot 0,245^2) + \frac{\pi \cdot e \cdot 0,245^3}{2} = 0,5491 \cdot e \quad (4.61)$$

$$e = 0,0117 \text{ m}$$

#### 4.2.2.- FLECHA Y TENSIÓN NORMAL

Al igual que en el modelo 1, se calculó la flecha en la punta del ala y la tensión normal en la mitad de la longitud por el mismo motivo que anteriormente (concentración de tensiones en el empotramiento).

##### Modelo 2A

Este primer modelo corresponde al de espesor constante, por lo que debido a la concentración de la carga que se produce en la cara superior del perfil el espesor de 11,7 mm no era suficiente y fue necesario aumentarlo hasta 36mm. Con esto se aseguraba que se encontraba el modelo dentro de los límites de rotura del aluminio.

$$e = 0,036 \text{ m}$$

$$I_x = 0,01976 \text{ m}^4$$

Se calculó primeramente la flecha (4.62).

$$Flecha = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 0,01976} = 0,509 \text{ m} \quad (4.62)$$

Posteriormente se calculó la tensión normal a 7,5 m del empotramiento (4.63).

$$\sigma_{7,5m} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} = \frac{0,245 \cdot 3224531}{0,01976} = 39,98 \text{ MPa} \quad (4.63)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 7,5^2}{2} = 3224531 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.64)$$

Una vez se obtuvieron los resultados analíticos se pasó a obtener los mismos datos del modelo MEF.

La flecha que se obtuvo en el centro de la sección de la punta del ala fue de 0,562 m y la flecha máxima fue de 0,703 m, la cual, corresponde a la cara superior como se puede ver en la figura 4.12.

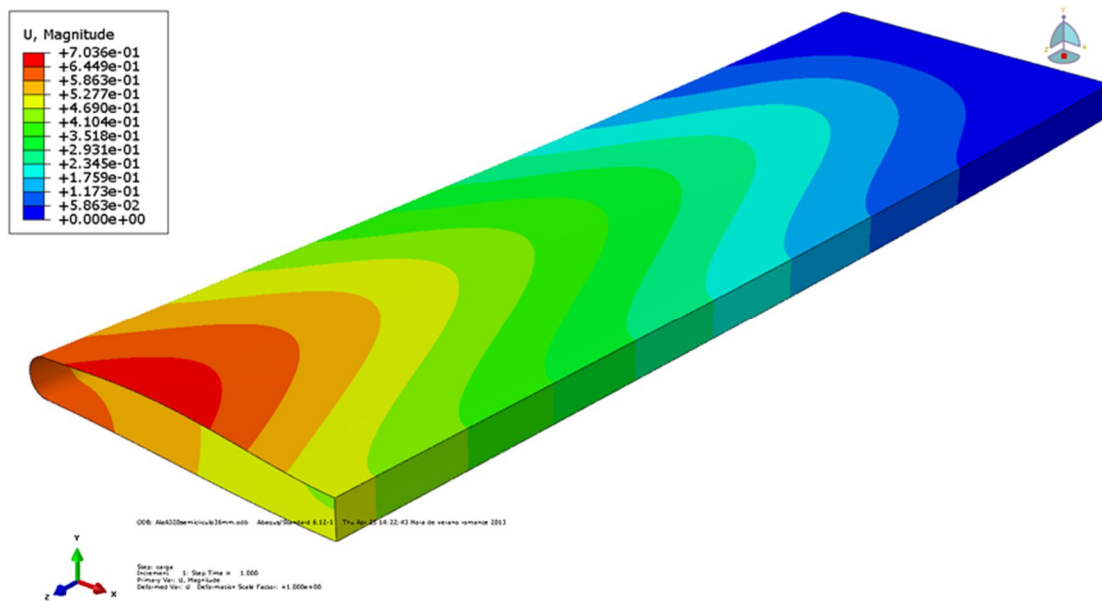


Figura 4.12. Deformada del modelo 2A MEF.

Como se puede ver en la figura 4.13 la tensión normal a 7,5m del empotramiento que se obtuvo fue de 38,1 MPa en la cara inferior y de 81,39 MPa en la superior. Esto se debe a la aplicación de la carga en la cara superior.

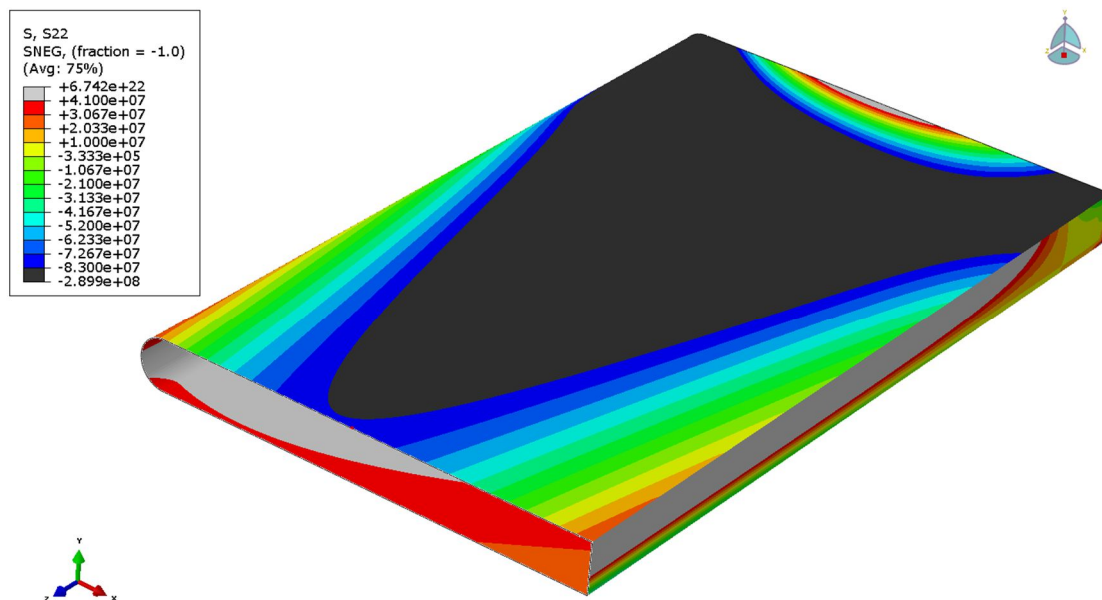


Figura 4.13. Distribución de tensiones normales sobre la mitad del modelo 2A MEF.

### **Modelo 2B**

Al igual que en el modelo 1 se introdujeron 7 costillas de 4mm, equidistantes unas de otras, para aumentar la rigidez y minimizar los efectos de la aplicación de la carga. Se ajustaron los espesores lo máximo posible a los 11,7mm que es el espesor ideal.

Los espesores que se colocaron en las caras superior e inferior han sido de 18mm y en las secciones laterales de 11,7mm.

$$e_1 = 0,0117 \text{ m}$$

$$e_2 = 0,018 \text{ m}$$

$$I_x = 9,676 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Se calculó la flecha de este nuevo modelo (4.65).

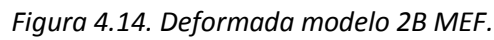
$$Flecha = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 9,52 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{1,041 \text{ m}} \quad (4.65)$$

Seguidamente se calculó la tensión normal a 7,5 m del empotramiento (4.66).

$$\sigma_{7,5m} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} = \frac{0,245 \cdot 3224531}{9,52 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{81,6 \text{ MPa}} \quad (4.66)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 7,5^2}{2} = 3224531 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.67)$$

La flecha obtenida en la punta del ala para el modelo 2B MEF fue de 1,154 m como se puede ver en la figura 4.14.



S, S22  
SNEG, (fraction = -1.0)  
(Avg: 75%)

|  |            |
|--|------------|
|  | +6.742e+22 |
|  | +8.400e+07 |
|  | +6.017e+07 |
|  | +3.633e+07 |
|  | +1.250e+07 |
|  | -1.133e+07 |
|  | -3.517e+07 |
|  | -5.900e+07 |
|  | -8.283e+07 |
|  | -1.067e+08 |
|  | -1.305e+08 |
|  | -1.543e+08 |
|  | -1.782e+08 |
|  | -2.020e+08 |
|  | -6.937e+08 |

*Figura 4.15. Distribución de tensiones normales sobre la mitad del modelo 2B MEF.*

### 4.2.3.- CORTANTES

#### -CÁLCULO GENERAL

Para el cálculo del esfuerzo cortante de esta sección se siguieron los mismos pasos que en el modelo 1, teniendo en cuenta los esfuerzos debidos a la carga vertical y al momento torsor.

#### Cortante debido a la carga vertical

El esfuerzo cortante total (4.68) debido a la carga vertical es la suma del esfuerzo cortante de la sección abierta (4.69) y la sección cerrada (4.72).

$$q(s) = q_a(s) + q(0) \quad (4.68)$$

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y + K_x \cdot Q_x = -K_y \cdot Q_y \quad (4.69)$$

$$K_y = \frac{m_{ex}^* \cdot I_y - m_{ey}^* \cdot P_{xy}}{I_x \cdot I_y - P_{xy}^2} = \frac{m_{ex}^*}{I_x} \quad (4.70)$$

$$m_{ex}^* = \int_A y(s) \cdot dA = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds \quad (4.71)$$

$$q(0) = - \frac{\int_0^s \frac{q(s)_{open}}{G \cdot e(s)} \cdot ds}{\int_0^s \frac{1}{G \cdot e(s)} \cdot ds} \quad (4.72)$$

Para el cálculo del esfuerzo cortante en la sección abierta se dividió en tramos la sección total como se ve en la figura 4.16.



Figura 4.16. Distribución de los tramos en la sección del modelo 2.

A continuación se pasó a calcular el esfuerzo cortante en la sección abierta en cada tramo y la integral de dicho esfuerzo, que posteriormente se utilizó en el cálculo del esfuerzo cortante de la sección cerrada como se hizo en el modelo 4.

TRAMO 1-2

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.73)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{s^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.74)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s^3 \cdot e_1}{6} \quad (4.75)$$

TRAMO 2-3

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_1}{2} \right] \quad (4.76)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_1}{2} \quad (4.77)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_1^2}{4} \right] \quad (4.78)$$

TRAMO 3-4

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} + R^2 \cdot e_1 \cdot \text{sen}\alpha \right] \quad (4.79)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} + R^2 \cdot e_1 \cdot \text{sen}\alpha \quad (4.80)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot \pi}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b \cdot \pi}{2} - R^3 \cdot e_1 \cdot \text{cos}\alpha \right] \quad (4.81)$$

TRAMO 4-5.

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} - \frac{e_2 \cdot h \cdot s_3}{2} \right] \quad (4.82)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} - \frac{e_2 \cdot h \cdot s_3}{2} \quad (4.83)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_3}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b \cdot s_3}{2} - \frac{e_2 \cdot h \cdot s_3^2}{4} \right] \quad (4.84)$$

#### TRAMO 5-6

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{e_1 \cdot s_4}{2} \cdot (s_4 - h) \right] \quad (4.85)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{e_1 \cdot s_4}{2} \cdot (s_4 - h) \quad (4.86)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_4}{8} + \frac{e_1 \cdot s_4^3}{6} - \frac{e_1 \cdot h \cdot s_4^2}{4} \right] \quad (4.87)$$

#### Centro de cortantes

A diferencia del modelo 1, el modelo 2 no es simétrico, por lo que fue necesario obtener el centro de cortantes que se utilizó posteriormente para el cálculo del momento torsor. Para ello se utilizó la fórmula 4.88 que se ha aplicado tramo a tramo como se muestra a continuación.

$$\int_0^s q(s) \cdot r(s) \cdot ds = Q_y \cdot c \quad (4.88)$$

#### TRAMO 1-2 Y 5-1

$$2 \cdot \int_0^{s_1} \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( \frac{e_1 \cdot s_1^2}{2} \right) + q(0) \right] \cdot b \cdot ds_1 = 2 \cdot b \cdot \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( \frac{e_1 \cdot s_1^3}{6} \right) + q(0) \cdot s_1 \right] \quad (4.89)$$

#### TRAMO 2-3 Y 4-5

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \int_0^{s_2} \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,03 \cdot e_1 + 0,245 \cdot s_2 \cdot e_2) + q(0) \right] \cdot \frac{h}{2} \cdot ds_2 = \\ & = 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( 0,03 \cdot e_1 \cdot s_2 + 0,245 \cdot \frac{s_2^2}{2} \cdot e_2 \right) + q(0) \cdot s_2 \right] \end{aligned} \quad (4.90)$$



TRAMO 3-4

$$\int_0^\alpha \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,03 \cdot e_1 + 1,0535 \cdot e_2 + 0,06 \cdot e_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha) + q(0) \right] \cdot R^2 \cdot d\alpha =$$

$$= R^2 \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,03 \cdot e_1 \cdot \pi + 1,0535 \cdot e_2 \cdot \pi + 0,06 \cdot e_1 \cdot (-\cos \alpha)) + q(0) \cdot \pi \right] \quad (4.91)$$

TOTAL

$$\frac{Q_y}{I_x} \cdot 1,088 \cdot e - \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,057 \cdot e - \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,11128 \cdot e = Q_y \cdot c \quad (4.92)$$

**Cortante debido al momento torsor**

Para el cálculo del cortante debido al momento torsor se utilizó la ecuación 4.93 que es la misma que en el modelo 1, pero con la diferencia que x es la distancia entre el punto de aplicación de la carga y el centro de cortantes.

$$\tau = \frac{M_T}{2 \cdot \Omega \cdot e_{min}} = \frac{Q_y \cdot x}{2 \cdot (h \cdot b) \cdot e_{min}} \quad (4.93)$$

**-CÁLCULO CONCRETO**

**Modelo 2A**

Con las fórmulas obtenidas anteriormente se pasó a calcular los valores de los esfuerzos cortantes, teniendo en cuenta las medidas y espesores del modelo 2A.

$$\text{Tramo 1-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 1,0804 \cdot 10^{-3} \quad (4.94)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 8,8237 \cdot 10^{-5} \quad (4.95)$$

$$\text{Tramo 2-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,039 \quad (4.96)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,08618 \quad (4.97)$$

$$\text{Tramo 3-4: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,039 / \text{Punto B: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0411 \quad (4.98)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,03055 \quad (4.99)$$

$$\text{Tramo 4-5: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 1,0804 \cdot 10^{-3} \quad (4.100)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,08618 \quad (4.101)$$

$$\text{Tramo 5-6: } q_a(s) = 0 \quad (4.102)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 8,8237 \cdot 10^{-5} \quad (4.103)$$

A continuación se ha representado el diagrama de esfuerzos cortantes para la sección abierta con los resultados obtenidos (figura 4.17).

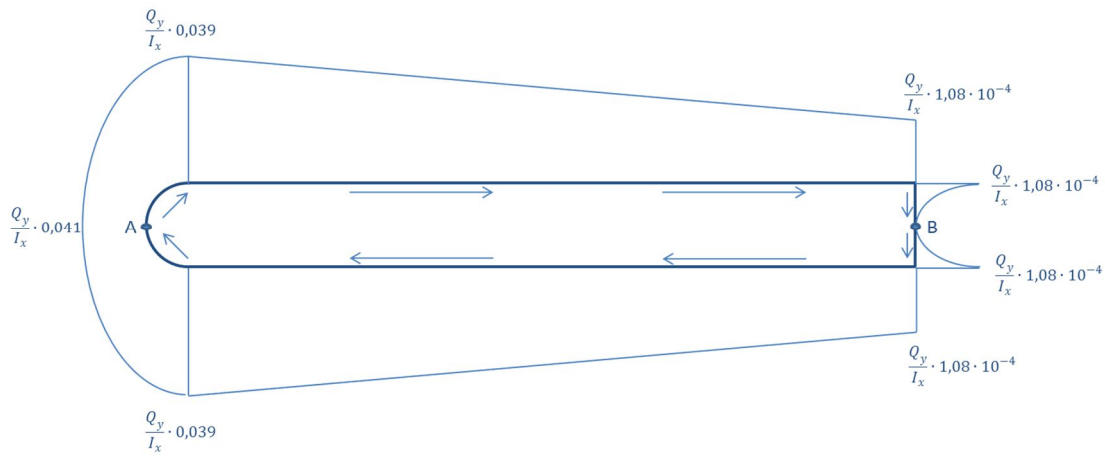


Figura 4.17. Diagrama de esfuerzos cortantes de la sección abierta del modelo 2A.

Con los resultados de la sección abierta calculados se pasó a obtener el esfuerzo cortante para la sección cerrada (4.104).

$$q(0) = -\frac{\int_0^s \frac{q(s)_{open}}{G \cdot e(s)} \cdot ds}{\int_0^s \frac{1}{G \cdot e(s)} \cdot ds} = -\frac{\int_0^{2 \cdot (h+b)} q_a(s) \cdot ds}{2 \cdot b + h + \pi \cdot \frac{h}{2}} = -\frac{-\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,203}{9,85} = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0205 \quad (4.104)$$

Para obtener el esfuerzo cortante total debido a la carga vertical se sumó el cortante de la sección abierta y cerrada. En la figura 4.18 se muestra el diagrama completo de esfuerzos cortantes debido a la carga vertical.

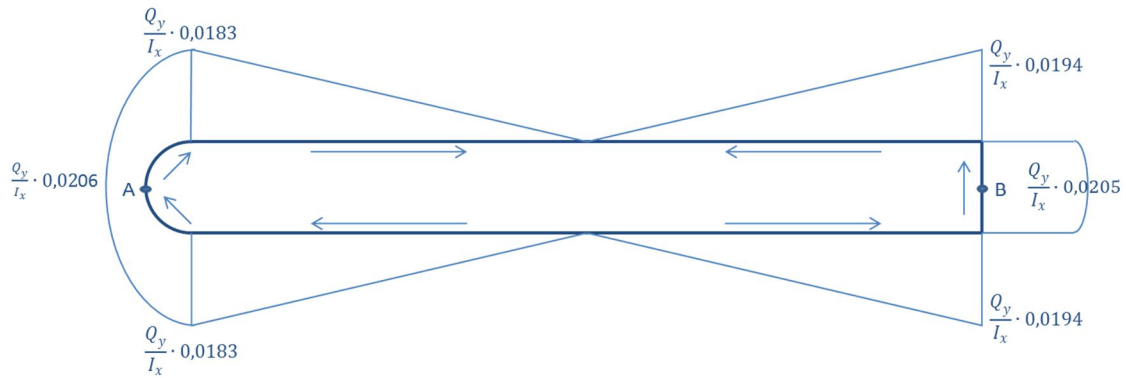


Figura 4.18. Diagrama de esfuerzos cortantes debido a la carga vertical del modelo 2A.

Para terminar se calculó el esfuerzo cortante debido al momento torsor. Para ello se obtuvo primero el centro de cortantes (4.105) y posteriormente el esfuerzo cortante debido al momento torsor (4.106).

$$c = \frac{1,18753 \cdot e}{I_x} = 2,1635 \text{ m} \quad (4.105)$$

$$\tau_{7,5} = \frac{Q_y \cdot x}{2 \cdot (h \cdot b + \frac{\pi \cdot (\frac{h}{2})^2}{2}) \cdot e_{min}} = \frac{859950 \cdot 0,73}{2 \cdot (4,3 \cdot 0,49 + \frac{\pi \cdot 0,245^2}{2}) \cdot 0,036} = 3,96 \text{ MPa} \quad (4.106)$$

Con todos los cálculos realizados se obtuvieron los esfuerzos cortantes en los puntos A (4.107) y B (4.108) que son los puntos más críticos.

$$A = 24,98 \text{ MPa} + 3,96 \text{ MPa} = 28,86 \text{ MPa} \quad (4.108)$$

$$B = 25,5 \text{ MPa} - 3,96 \text{ MPa} = 21,54 \text{ MPa} \quad (4.109)$$

Con los resultados analíticos calculados se obtuvo el esfuerzo cortante del modelo 2A MEF, que es de 30,54 MPa en el punto A como se ve en la figura 4.19.

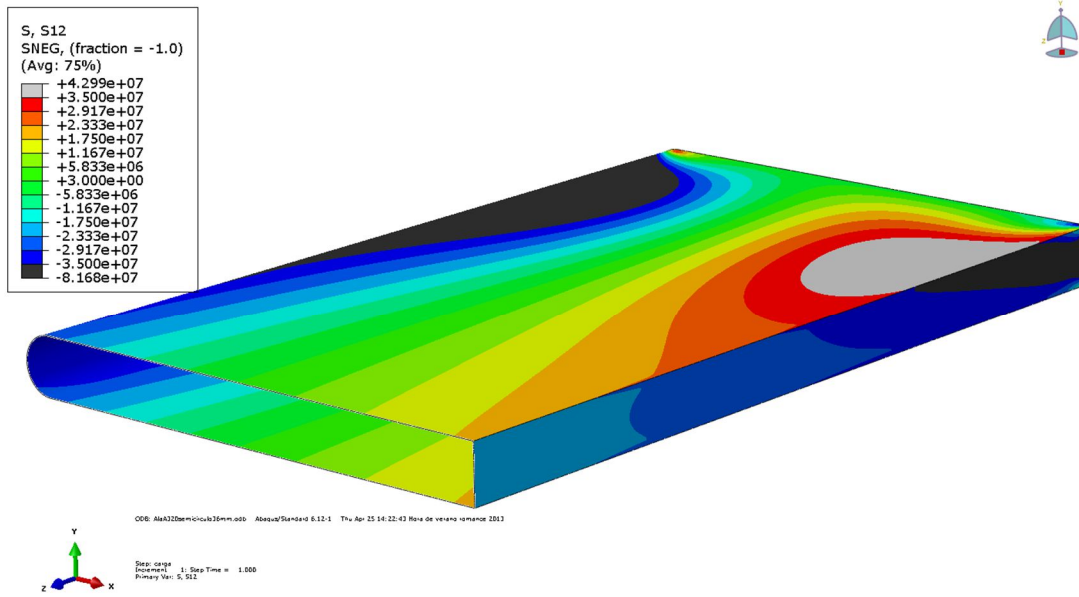


Figura 4.19. Esfuerzos cortantes en la mitad del modelo 2A MEF.

### Modelo 2B

Para obtener los valores del esfuerzo cortante del modelo 2B se siguió el mismo proceso que para el modelo 1B, utilizando los espesores correspondientes.

$$\text{Tramo 1-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,5115 \cdot 10^{-4} \quad (4.110)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,8677 \cdot 10^{-5} \quad (4.111)$$

$$\text{Tramo 2-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,01931 \quad (4.112)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,04229 \quad (4.113)$$

$$\text{Tramo 3-4: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,01931 / \text{Punto B: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,02 \quad (4.114)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,01503 \quad (4.115)$$

$$\text{Tramo 4-5: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,5115 \cdot 10^{-4} \quad (4.116)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,04229 \quad (4.117)$$

$$\text{Tramo 5-6: } q_a(s) = 0 \quad (4.118)$$

$$q(0) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,8677 \cdot 10^{-5} \quad (4.119)$$

El diagrama de esfuerzos cortantes tiene la misma distribución que en el modelo 2A pero con los valores calculados en este apartado. Ahora se pasó a calcular el esfuerzo de la sección cerrada al igual que en el modelo 2A.

$$q(0) = -\frac{\int_0^s \frac{q(s)_{open}}{G \cdot e(s)} \cdot ds}{\int_0^s \frac{1}{G \cdot e(s)} \cdot ds} = -\frac{\int_0^{2 \cdot (h+b)} q_a(s) \cdot ds}{2 \cdot b + h + \pi \cdot \frac{h}{2}} = -\frac{-\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0996}{9,85} = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,01011 \quad (4.120)$$

El esfuerzo cortante debido al momento torsor (4.122) se obtuvo igual que en el modelo 2A utilizando para ello el resultado del centro de cortantes (4.121).

$$c = \frac{0,0199}{I_x} = 2,057 \text{ m} \quad (4.121)$$

$$\tau_{7,5} = \frac{Q_y \cdot x}{2 \cdot (h \cdot b + \frac{\pi \cdot (\frac{h}{2})^2}{2}) \cdot e_{min}} = \frac{859950 \cdot 0,6237}{2 \cdot (4,3 \cdot 0,49 + \frac{\pi \cdot 0,245^2}{2}) \cdot 0,0117} = 10,42 \text{ MPa} \quad (4.122)$$

Al igual que en el modelo 2A se obtuvieron los valores para los puntos A (4.123) y B (4.124) que son los puntos más críticos.

$$A = 75,12 \text{ MPa} + 10,42 \text{ MPa} = 85,54 \text{ MPa} \quad (4.123)$$

$$B = 76,8 \text{ MPa} - 10,42 \text{ MPa} = 66,38 \text{ MPa} \quad (4.124)$$

El resultado del modelo 2B MEF para el esfuerzo cortante es de 86,1 MPa para el punto A como se ve en la figura 4.20.

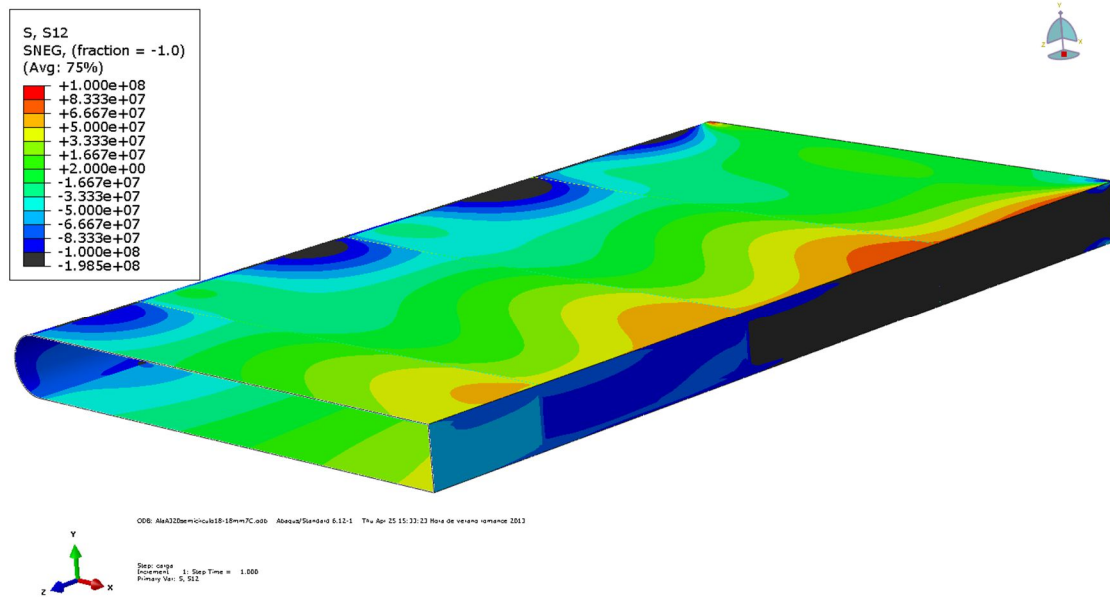


Figura 4.20. Esfuerzos cortantes en la mitad del modelo 2B MEF.

#### 4.2.4.- DISCUSIÓN DE RESULTADOS DEL MODELO 2

En la tabla 4.2 se puede ver que el modelo 2 tiene un comportamiento en cuanto a resultados prácticamente idéntico al modelo 1. Se producen los mismos fenómenos asociados a la concentración de la carga en la cara superior (aumento de flecha y tensiones). También se observa que las costillas tienen el mismo efecto que en el modelo 1.

|                      | FLECHA (m)    | ERROR  | $\sigma$ (MPa) | ERROR   | $\tau$ (MPa) | ERROR | PESO (Kg) | SUPERFICIE (m2) |
|----------------------|---------------|--------|----------------|---------|--------------|-------|-----------|-----------------|
| <b>MODELO 2A</b>     | 0,509         | 10,41% | 39,98          | 0,05%   | 28,88        | 5,43% | 14375     | 147,9           |
| <b>MODELO 2A MEF</b> | 0,562 / 0,703 | 38,11% | 40 / 81,4      | 103,57% | 30,54        |       |           |                 |
| <b>MODELO 2B</b>     | 1,041         | 10,85% | 81,6           | 1,97%   | 85,54        | 0,65% | 7032      | 162,6           |
| <b>MODELO 2B MEF</b> | 1,154         |        | 83,2 / 202     | 148%    | 86,1         |       |           |                 |

Tabla 4.2. Datos del modelo 2.

### 4.3.-MODELO 3

En el tercer modelo se crearon dos celdas, para ello se separó la sección rectangular de la semicircular (figura 4.21).

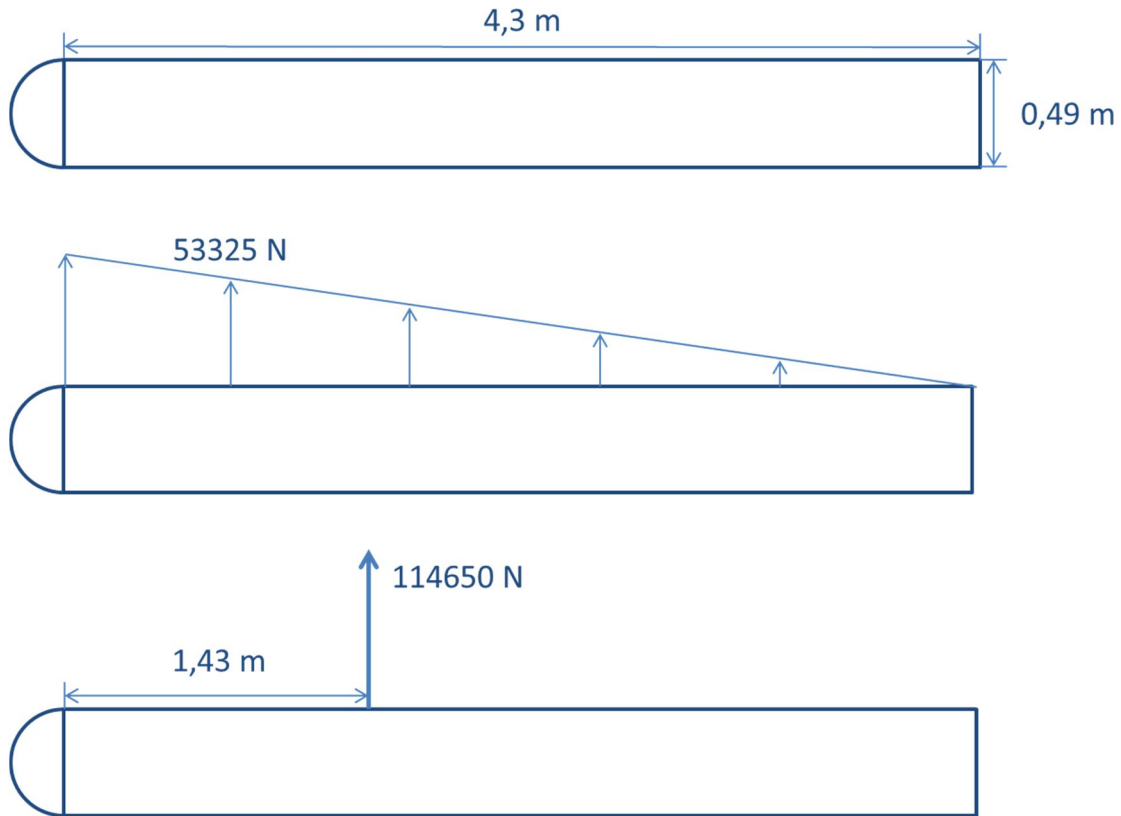


Figura 4.21. Sección acotada y distribución de la carga del modelo 3.

#### 4.3.1.- CÁLCULO DEL ESPESOR

Este apartado es igual que en los anteriores modelos, teniendo en cuenta las limitaciones de flecha (4.125) y tensión de rotura del aluminio (4.126).

$$\text{Flecha máxima} = 16\% \rightarrow 2,4m$$

$$F_{max} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} \rightarrow I_x = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot F_{max}} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 2,4} = 4,198 \cdot 10^{-3} m^4 \quad (4.125)$$

$$\sigma_{emp} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} \rightarrow I_x = \frac{y \cdot M_x}{\sigma_{emp}} = \frac{0,245 \cdot 12898800}{490 \cdot 10^6} = 6,449 \cdot 10^{-3} m^4 \quad (4.126)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 15^2}{2} = 12898800 N \cdot m \quad (4.127)$$

Se calculó el espesor teórico que sería necesario para cumplir las limitaciones impuestas (4.128).

$$I_x = 2 \cdot \left( \frac{1}{12} \cdot e \cdot 0,49^3 \right) + 2 \cdot (e \cdot 4,3 \cdot 0,245^2) + \frac{\pi \cdot e \cdot 0,245^3}{2} = 0,5589 \cdot e \quad (4.128)$$

$$e = 0,01153 \text{ m}$$

#### **4.3.2.- FLECHA Y TENSIÓN NORMAL**

Se siguieron las mismas pautas que en los modelos anteriores para el cálculo de la flecha en la punta del ala y la tensión normal a mitad de longitud de la misma.

##### **Modelo 3A**

Este modelo 3A corresponde al de espesor constante. Para cumplir todos los requerimientos se tomó un espesor de 30 mm, que es el mínimo que garantiza dichas condiciones.

$$e = 0,03 \text{ m}$$

$$I_x = 0,01677 \text{ m}^4$$

Se calculó la flecha (4.129).

$$Flecha = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 0,01677} = 0,6 \text{ m} \quad (4.129)$$

Seguidamente se calculó la tensión normal a 7,5 m del empotramiento (4.130).

$$\sigma_{7,5m} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} = \frac{0,245 \cdot 3224531}{0,01677} = 47,11 \text{ MPa} \quad (4.130)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 7,5^2}{2} = 3224531 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.131)$$

Con los resultados analíticos calculados se obtuvieron los del modelo MEF.

Al igual que en los modelos anteriores la flecha máxima se obtuvo en la cara superior, siendo de 0,841 m y la flecha en el centro de la sección fue de 0,65 m como se ve en la figura 4.22.



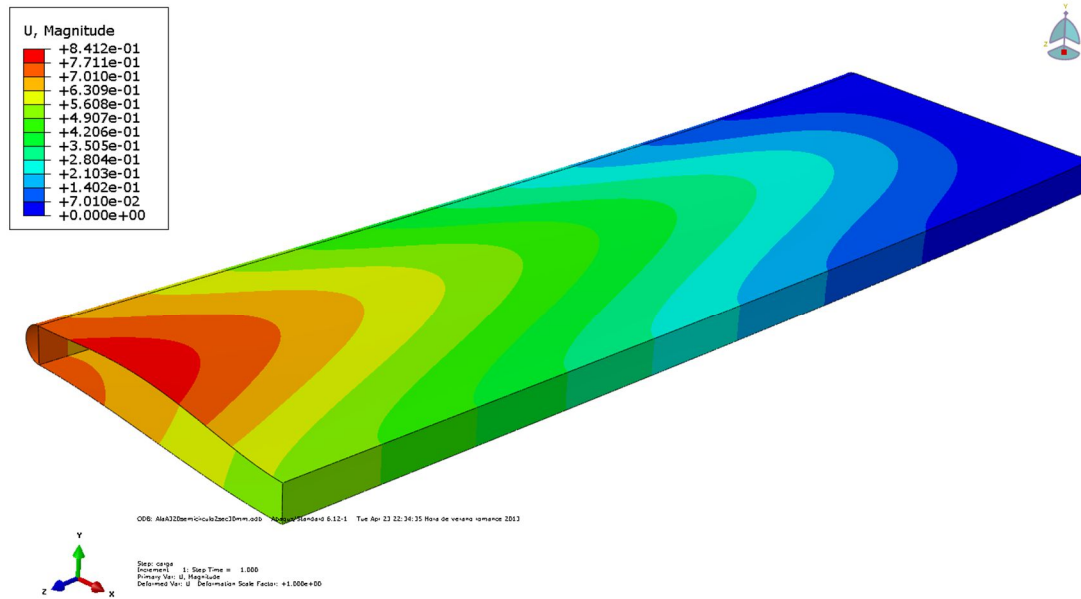


Figura 4.22. Deformada del modelo 3A MEF.

En la figura 4.23 tenemos la distribución de tensiones normal en la mitad del modelo. La tensión máxima en la cara inferior es de 56,25 MPa y de 99,9 MPa en la superior.

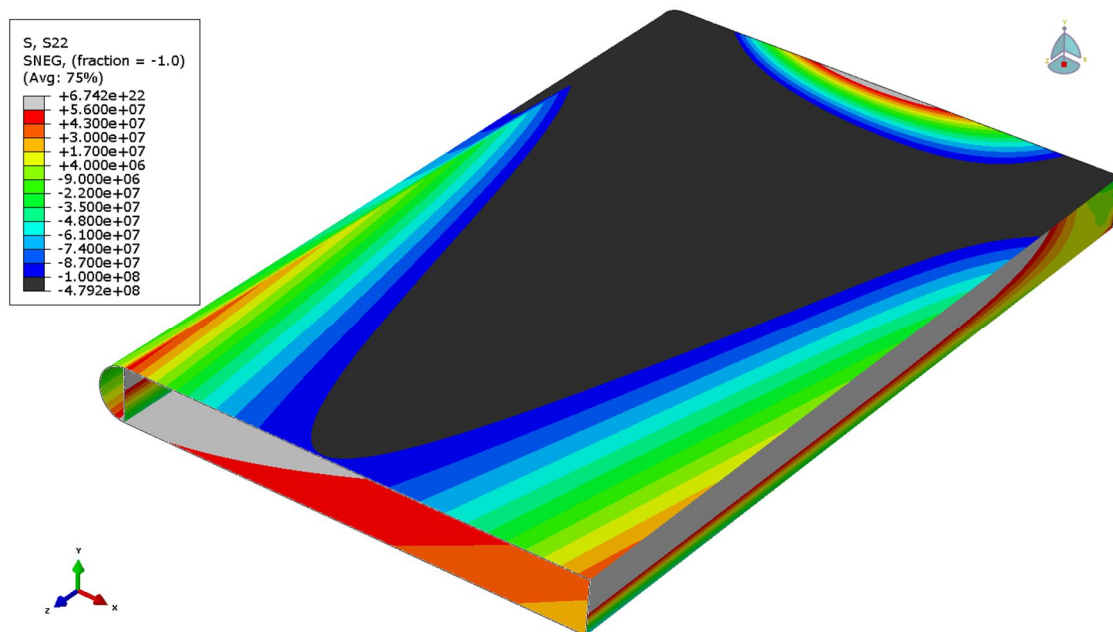


Figura 4.23. Tensión normal del modelo 3A MEF.

### Modelo 3B

En este modelo se añadieron 7 costillas de 4 mm como en los casos anteriores y se redujeron los espesores lo máximo posible. Quedó finalmente un espesor de 18 mm en las caras superior e inferior y de 11,5 mm en las secciones verticales y semicircular.

$$e_1 = 0,0115 \text{ m}$$

$$e_2 = 0,018 \text{ m}$$

$$I_x = 9,78 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Se calculó la flecha (4.132) y la tensión normal a 7,5 m del empotramiento (4.133)

$$Flecha = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 9,52 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{1,03 \text{ m}} \quad (4.132)$$

$$\sigma_{7,5m} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} = \frac{0,245 \cdot 3224531}{9,52 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{80,78 \text{ MPa}} \quad (4.133)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 7,5^2}{2} = 3224531 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.134)$$

La flecha del modelo 3B MEF es de 1,138 m, se puede ver en la figura 4.24.

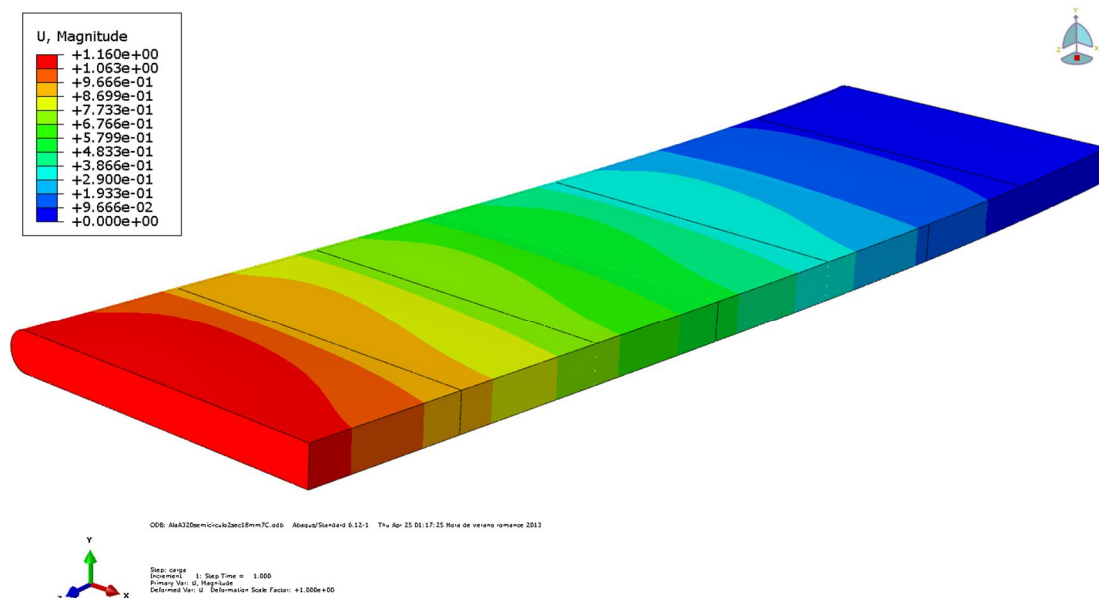


Figura 4.24. Deformada modelo 3B MEF.

La tensión normal a 7,5 m del empotramiento para el modelo 3B MEF es de 83 MPa en la cara inferior y de 196 MPa en la superior como se ve en la figura 4.25.

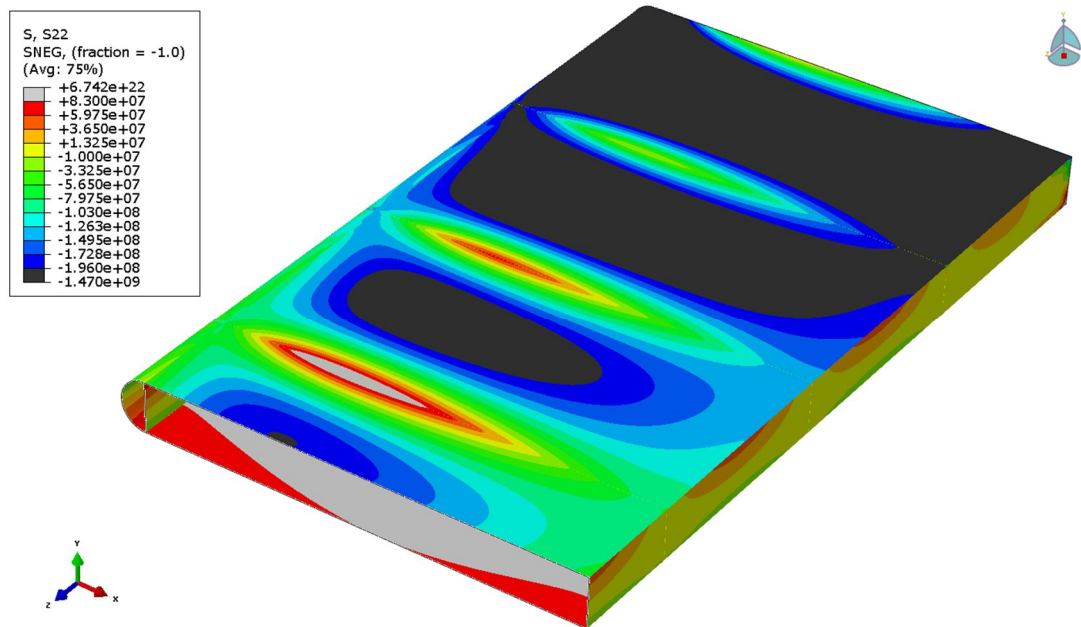


Figura 4.25. Tensión normal del modelo 3B MEF.

### 4.3.3.- CORTANTES

#### -CÁLCULO GENERAL

#### Cortante debido a la carga vertical

El esfuerzo cortante de este modelo se calculó de forma similar a los anteriores. Primero se calculó el esfuerzo cortante de la sección abierta siguiendo los tramos que se ven en la figura 4.26.



Figura 4.26. Distribución de los tramos en la sección del modelo 3.

TRAMO 1-2

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_1^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.135)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{s_1^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.136)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_1^3 \cdot e_1}{6} \quad (4.137)$$

TRAMO 2-3

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_2}{2} \right] \quad (4.138)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_2}{2} \quad (4.139)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_2}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_2^2}{4} \right] \quad (4.140)$$

TRAMO 6-3

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_6^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.141)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = \frac{s_6^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.142)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_6^3 \cdot e_1}{6} \quad (4.143)$$

TRAMO 1-5

$$q_a(s) = K_y \cdot Q_y = \frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_5^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.144)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = -\frac{s_5^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.145)$$

$$\int q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_5^3 \cdot e_1}{6} \quad (4.146)$$

TRAMO 5-4

$$q_a(s) = K_y \cdot Q_y = \frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_4}{2} \right] \quad (4.147)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = -\frac{h^2 \cdot e_1}{8} - \frac{h \cdot e_2 \cdot s_4}{2} \quad (4.148)$$

$$\int q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_4}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_4^2}{4} \right] \quad (4.149)$$

TRAMO 6-4

$$q_a(s) = K_y \cdot Q_y = \frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_7^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.150)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^s y(s) \cdot e(s) \cdot ds = -\frac{s_7^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.151)$$

$$\int q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_7^3 \cdot e_1}{6} \quad (4.152)$$

TRAMO 3-4

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1}{4} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} + R^2 \cdot e_1 \cdot \text{sen}\alpha \right] \quad (4.153)$$

$$m_{ex}^* = \int_0^\alpha y(s) \cdot e(s) \cdot R d\alpha = \frac{h^2 \cdot e_1}{4} + \frac{h \cdot e_2 \cdot b}{2} + R^2 \cdot e_1 \cdot \text{sen}\alpha \quad (4.154)$$

$$\int q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left[ \frac{h^2 \cdot e_1 \cdot s_2}{8} + \frac{h \cdot e_2 \cdot s_2^2}{4} \right] \quad (4.155)$$

- **Secciones cerradas.**

La sección de este modelo tiene 2 celdas, por lo que para el cálculo de la sección cerrada se impuso la condición de la fórmula 4.156, teniendo en cuenta la distribución de la secciones de la figura 4.27.

$$\int_0^s \frac{q(s)}{e(s)} \cdot ds = 0 \quad (4.156)$$



Figura 4.27. Distribución secciones cerradas del modelo 3.

#### CELDA 1

El planteamiento de la celda 1 según la imposición anterior queda de la siguiente forma como se ve en la fórmula 4.157.

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} (q_a^{12}(s_1) + q_1 0) \cdot ds_1 + \int_0^{s_2} (q_a^{23}(s_2) + q_1 0) \cdot ds_2 - \int_0^{s_6} (q_a^{63}(s_6) + q_2 0 - q_1 0) \cdot ds_6 \\ + \int_0^{s_7} (q_a^{67}(s_7) + q_1 0 - q_2 0) \cdot ds_7 - \int_0^{s_4} (q_a^{45}(s_4) - q_1 0) \cdot ds_4 \\ - \int_0^{s_5} (q_a^{51}(s_5) - q_1 0) \cdot ds_5 \end{aligned} \quad (4.157)$$

El desarrollo de cada tramo queda de la siguiente forma:

$$\int_0^{s_1} (q_a^{12}(s_1) + q_1 0) \cdot ds_1 = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 0,245 \cdot q_1 0 \quad (4.158)$$

$$\int_0^{s_2} (q_a^{23}(s_2) + q_1 0) \cdot ds_2 = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,129 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 2,26 \cdot e_2) + 4,3 \cdot q_1 0 \quad (4.159)$$

$$-\int_0^{s_6} (q_a^{63}(s_6) + q_2 0 - q_1 0) \cdot ds_6 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 - 0,245 \cdot q_2 0 + 0,245 \cdot q_1 0 \quad (4.160)$$

$$\int_0^{s_7} (q_a^{67}(s_7) + q_1 0 - q_2 0) \cdot ds_7 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 - 0,245 \cdot q_2 0 + 0,245 \cdot q_1 0 \quad (4.161)$$

$$-\int_0^{s_4} (q_a^{45}(s_4) - q_1 0) \cdot ds_4 = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,129 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 2,26 \cdot e_2) + 4,3 \cdot q_1 0 \quad (4.162)$$

$$-\int_0^{s_5} (q_a^{51}(s_5) - q_1 0) \cdot ds_5 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 0,245 \cdot q_1 0 \quad (4.163)$$

El resultado final para la celda 1 se ve en la fórmula 4.164.

$$-\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,2531 \cdot e_1 + 4,52 \cdot e_2) + 9,58 \cdot q_1 - 0,49 \cdot q_2 \quad (4.164)$$

## CELDA 2

El planteamiento para la celda 2 siguió el mismo proceso que para la celda 1 (4.165).

$$\int_0^{s_3} (q_a^{34}(s_3) + q_2 0) \cdot R d\alpha - \int_0^{s_7} (q_a^{64}(s_7) + q_1 0 - q_2 0) \cdot ds_7 + \int_0^{s_7} (q_a^{63}(s_6) + q_2 0 - q_1 0) \cdot ds_6 \quad (4.165)$$

El desarrollo de los tres tramos correspondientes a la celda 2 es el siguiente:

$$\int_0^{s_3} (q_a^{34}(s_3) + q_2 0) \cdot R d\alpha = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,123 \cdot e_1 + 0,8085 \cdot e_2) + 0,77 \cdot q_2 0 \quad (4.166)$$

$$- \int_0^{s_7} (q_a^{64}(s_7) + q_1 0 - q_2 0) \cdot ds_7 \\ = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 - 0,245 \cdot q_1 0 + 0,245 \cdot q_2 0 \quad (4.167)$$

$$\int_0^{s_7} (q_a^{63}(s_6) + q_2 0 - q_1 0) \cdot ds_6 \\ = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 0,245 \cdot q_1 0 - 0,245 \cdot q_2 0 \quad (4.168)$$

El resultado final para la celda 2 se ve en la fórmula 4.169.

$$-\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,123 \cdot e_1 + 0,8085 \cdot e_2) + 0,77 \cdot q_2 0 \quad (4.169)$$

## Centro de cortantes

Al igual que en el modelo 2, este tampoco es simétrico y se debió calcular el centro de cortantes. Para ello se siguió el mismo proceso que en el modelo 2 utilizando la fórmula 4.170 y situando el punto de referencia en el punto 6.

$$\int_0^s q_{(s)} \cdot r_{(s)} \cdot ds = Q_y \cdot c \quad (4.170)$$

TRAMO 1-2 Y 1-5

$$2 \cdot \int_0^{s_1} (q_a^{12} + q_1 0) \cdot b \cdot ds_1 = 2 \cdot \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{e_1 \cdot s_1^3}{6} + q_1 0 \cdot s_1 \right] \cdot b \quad (4.171)$$

TRAMO 2-3 Y 5-4

$$\int_0^{s_2} (q_a^{23} + q_1 0) \cdot \frac{h}{2} \cdot ds_2 = 2 \cdot \frac{h}{2} \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( 0,03 \cdot e_1 \cdot s_2 + 0,245 \cdot e_2 \cdot \frac{s_2^2}{2} \right) + q_1 0 \cdot s_2 \right] \quad (4.172)$$

TRAMO 3-4

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_3} (q_a^{84} + q_2 0) \cdot R \cdot R d\alpha \\ &= R^2 \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,03 \cdot e_1 \cdot \pi + 1,0535 \cdot e_2 \cdot \pi + 0,06 \cdot 2 \cdot e_1 \cdot (-\cos\pi)) + q_2 0 \right. \\ & \quad \left. \cdot \pi \right] \quad (4.173) \end{aligned}$$

Los tramos 6-3 y 6-4 no se calcularon ya que el producto de  $q_{(s)} \cdot r_{(s)}$  es 0.

- **Modelo 3A**

En este apartado se calcula el valor del centro de cortantes, teniendo en cuenta el espesor y el momento de inercia correspondientes al mismo que aparecen a continuación.

$$e_1 = e_2 = 30mm$$

$$I_x = 0,016767 m^4$$

Para el cálculo del centro de cortantes es necesario haber calculado previamente los valores  $q_1$  y  $q_2$ . Esto se hizo con una simple resolución de sistemas de 2 incógnitas y 2 ecuaciones basadas en las ecuaciones 4.164 y 4.169. Los resultados se muestran a continuación.

$$q_1 = 1,059 Q_y$$

$$q_2 = 3,29 Q_y$$



Estos valores se sustituyeron en las ecuaciones 4.171, 4.172, y 4.173 correspondientes al centro de cortantes obteniendo que el centro de cortantes se encuentra a 2,1 m a la derecha del punto 6.

$$8,6 \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 7,35 \cdot 10^{-5} + 0,245 \cdot Q_y \right] = 2,069 \cdot Q_y \quad (4.174)$$

$$0,49 \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,072 + 4,31 \cdot Q_y \right] = 7,76 \cdot 10^{-3} \cdot Q_y \quad (4.175)$$

$$0,06 \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,106 + 6,81 \cdot Q_y \right] = 0,029 \cdot Q_y \quad (4.176)$$

$$2,1 \cdot Q_y = Q_y \cdot c \quad (4.177)$$

$$\mathbf{C = 2,1 \text{ m}} \quad (4.178)$$

- **Modelo 3B**

Al igual que para el modelo 3A, con los datos correspondientes al modelo 3B se obtuvo los valores  $q_1$  y  $q_2$  que se sustituyeron posteriormente en las ecuaciones del centro de cortantes 4.171, 4.172 y 4.173, quedando situado el centro de cortantes a 2,136 m a la derecha del punto 6.

$$e_1 = 11,5 \text{ mm}$$

$$e_2 = 18 \text{ mm}$$

$$I_x = 9,78 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$q_1 = 1,008 Q_y$$

$$q_2 = 2,168 Q_y$$

$$8,6 \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,81 \cdot 10^{-5} + 0,247 \cdot Q_y \right] = 2,099 \cdot Q_y \quad (4.179)$$

$$0,49 \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,042 + 4,33 \cdot Q_y \right] = 0,017 \cdot Q_y \quad (4.180)$$

$$0,06 \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,062 + 6,69 \cdot Q_y \right] = 0,02 \cdot Q_y \quad (4.181)$$

$$2,136 \cdot Q_y = Q_y \cdot c \quad (4.182)$$

$$\mathbf{C = 2,136 \text{ m}} \quad (4.182)$$

### Cortante debido al momento torsor

Al tener 2 celdas hizo falta calcular que momento torsor se tenía en cada celda. Para ello nos valimos de la fórmula 4.183 que en función del momento torsor total y los parámetros C (ecuaciones de compatibilidad) y J (4.184) obtuvimos el cortante en cada celda.

$$q_i = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_i}{\sum J_i} \quad (4.183)$$

$$J_i = \frac{4 \cdot \Omega_i^2}{\oint_i \frac{ds}{e(s)}} \quad (4.184)$$

En la figura 4.28 aparece la distribución y sentido de los momentos torsores.



Figura 4.28. Distribución y sentido de los momentos torsores del modelo 3.

- **Modelo 3A**

Una vez se plantearon las bases del cálculo de los esfuerzos cortantes debido al momento torsor en perfiles de más de una celda, se pasó al cálculo concreto para el modelo 3A que tiene los siguientes datos geométricos.

$$e_1 = e_2 = 30mm$$

$$I_x = 0,016767 m^4$$

$$c = 2,1 m$$

Primeramente se obtuvieron los valores de  $J_1$  (4.185) ,  $J_2$  (4.186) y la suma de las mismas (4.187).

$$J_1 = \frac{4 \cdot \Omega_1^2}{\oint_1 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot R^2}{2}\right)^2}{\frac{\pi \cdot R}{e} + \frac{h}{e}} = \frac{0,0355}{25,65 + 16,33} = 8,456 \cdot 10^{-4} m^4 \quad (4.185)$$

$$J_2 = \frac{4 \cdot \Omega_2^2}{\oint_2 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot (b \cdot h)^2}{\frac{2b}{e} + \frac{2h}{e}} = \frac{17,75}{286,6 + 32,6} = 0,055 m^4 \quad (4.186)$$

$$\sum J = 0,0564 \text{ m}^4 \quad (4.187)$$

Con los valores de J calculados se pasó a plantear las ecuaciones de compatibilidad para obtener los valores  $C_1$  (4.197) y  $C_2$  (4.198).

$$C_1 \cdot \oint_1 \frac{ds}{e} + (C_1 - C_2) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} = \Omega_1 \quad (4.188)$$

$$C_2 \cdot \oint_2 \frac{ds}{e} + (C_2 - C_1) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} = \Omega_2 \quad (4.189)$$

$$\oint_1 \frac{ds}{e} = \frac{\pi \cdot R}{e} = 25,65 \quad (4.190)$$

$$\oint_2 \frac{ds}{e} = \frac{2 \cdot b}{e} + \frac{h}{e} = 303 \quad (4.191)$$

$$\oint_{12} \frac{ds}{e} = \frac{h}{e} = 16,33 \quad (4.192)$$

$$\Omega_1 = 0,094 \text{ m}^2 \quad (4.193)$$

$$\Omega_2 = 2,107 \text{ m}^2 \quad (4.194)$$

$$25,65C_1 + 16,33C_1 - 16,33C_2 = 0,094 \quad (4.195)$$

$$303C_2 + 16,33C_2 - 16,33C_1 = 2,107 \quad (4.196)$$

$$C_1 = 4,88 \cdot 10^{-3} \quad (4.197)$$

$$C_2 = 6,84 \cdot 10^{-3} \quad (4.198)$$

Para terminar solo quedaba obtener el esfuerzo cortante debido al momento torsor (4.199) para la sección 1 (4.200) y sección 2 (4.201).

$$M_T = Q_y \cdot x = 859950 \cdot 0,66 = 573302 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.199)$$

$$q_1 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_1}{\sum J} = 99250 \text{ N/m} \quad (4.200)$$

$$q_2 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_2}{\sum J} = 139112 \text{ N/m} \quad (4.201)$$

• **Modelo 3B**

Para el modelo 3B se siguió el mismo proceso que para el modelo 3A teniendo en cuenta sus datos geométricos detallados a continuación.

$$e_1 = 11,5mm$$

$$e_2 = 18mm$$

$$I_x = 9,78 \cdot 10^{-3} m^4$$

$$c = 2,136$$

Se calcularon los valores de  $J_1$  (4.202),  $J_2$  (4.203) y la suma total (4.204).

$$J_1 = \frac{4 \cdot \Omega_1^2}{\oint_1 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot R^2}{2}\right)^2}{\frac{\pi \cdot R}{e_1} + \frac{h}{e_1}} = \frac{0,0355}{66,9 + 42,6} = 3,24 \cdot 10^{-4} m^4 \quad (4.202)$$

$$J_1 = \frac{4 \cdot \Omega_1^2}{\oint_1 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot (b \cdot h)^2}{\frac{2b}{e_2} + \frac{2h}{e_1}} = \frac{17,75}{477 + 85} = 0,031 m^4 \quad (4.203)$$

$$\sum J = 0,0319 m^4 \quad (4.204)$$

Con las ecuaciones de compatibilidad se obtuvieron  $C_1$  (4.214) y  $C_2$  (4.215).

$$C_1 \cdot \oint_1 \frac{ds}{e} + (C_1 - C_2) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} = \Omega_1 \quad (4.205)$$

$$C_2 \cdot \oint_2 \frac{ds}{e} + (C_2 - C_1) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} = \Omega_2 \quad (4.206)$$

$$\oint_1 \frac{ds}{e} = \frac{\pi \cdot R}{e_1} = 66,9 \quad (4.207)$$

$$\oint_2 \frac{ds}{e} = \frac{2 \cdot b}{e_2} + \frac{h}{e_1} = 520 \quad (4.208)$$

$$\oint_{12} \frac{ds}{e} = \frac{h}{e_1} = 42,6 \quad (4.209)$$

$$\Omega_1 = 0,094m^2 \quad (4.210)$$

$$\Omega_2 = 2,107m^2 \quad (4.211)$$

$$66,9C_1 + 42,6C_1 - 42,6C_2 = 0,094 \quad (4.212)$$

$$520C_2 + 42,6C_2 - 42,6C_1 = 2,107 \quad (4.213)$$

$$C_1 = 2,39 \cdot 10^{-3} \quad (4.214)$$

$$C_2 = 3,92 \cdot 10^{-3} \quad (4.215)$$

Con todos los datos previos calculados se obtuvo el esfuerzo cortante debido al momento torsor (4.216) para la sección 1 (4.217) y sección 2 (4.218).

$$M_T = Q_y \cdot x = 859950 \cdot 0,702 = 603684 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.216)$$

$$q_1 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_1}{\sum J} = 90539 \text{ N/m} \quad (4.217)$$

$$q_2 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_1}{\sum J} = 148500 \text{ N/m} \quad (4.218)$$

### **- CÁLCULO GENERAL**

A continuación se calcula el valor de los esfuerzos cortantes para cada modelo teniendo en cuenta los datos previamente calculados.

#### **Modelo 3A**

Primeramente se obtuvieron los valores para la sección abierta del modelo 3A.

##### **Cortante sección abierta:**

$$\text{Tramo 1-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 9,0037 \cdot 10^{-4} \quad (4.219)$$

$$\text{Tramo 2-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,03251 \quad (4.220)$$

$$\text{Tramo 6-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 9,0037 \cdot 10^{-4} \quad (4.221)$$

$$\text{Tramo 1-5: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 9,0037 \cdot 10^{-4} \quad (4.222)$$

$$\text{Tramo 5-4: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,03251 \quad (4.223)$$

$$\text{Tramo 6-4: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 9,0037 \cdot 10^{-4} \quad (4.224)$$

$$\text{Tramo 3-4: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0334 \text{ / Punto C: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0352 \quad (4.225)$$

Con estos valores se puede representar el diagrama de cortantes para la sección abierta como se ve en la figura 4.29.

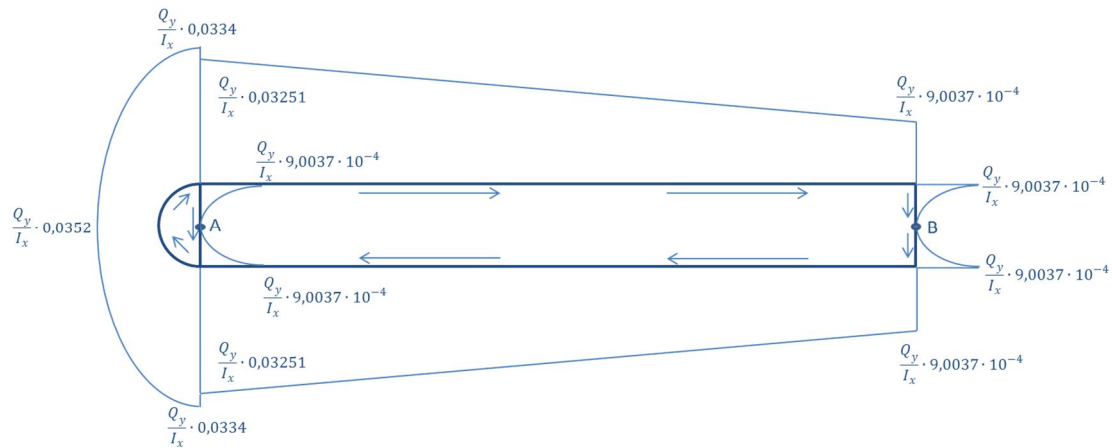


Figura 4.29. Diagrama de cortantes de la sección abierta del modelo 3A.

Se calcularon los valores de los esfuerzos cortantes para las secciones cerradas 1 (4.226) y 2 (4.227).

Cortante sección cerrada:

$$q_1 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0168 \quad (4.226)$$

$$q_2 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0363 \quad (4.227)$$

Con todos los datos de esfuerzos cortantes debido a la carga vertical se puede representar el diagrama correspondiente para la sección como se ve en la figura 4.30.

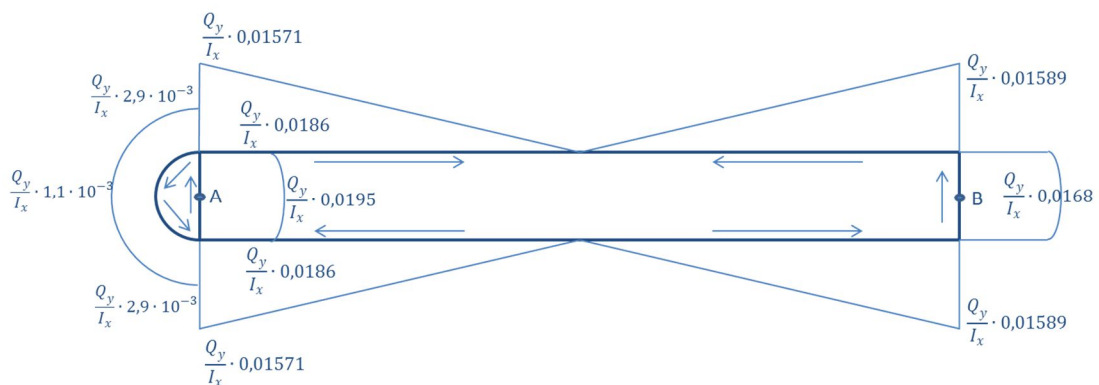


Figura 4.30. Diagrama de cortantes para la carga vertical del modelo 3A.

Se calculó el valor del esfuerzo cortante debido al momento torsor para los puntos A (4.228) y B (4.229) que son los más críticos.

Cortante debido al Momento torsor:

$$\tau_A = q_1 - q_2 = -99250 - (-139112) = 39862 \rightarrow 1,33 \text{ MPa} \quad (4.228)$$

$$\tau_B = q_2 = 139112 \rightarrow 4,6 \text{ MPa} \quad (4.229)$$

Por último se obtuvo el valor final del esfuerzo cortante para los puntos A (4.229) y B (4.230), teniendo en cuenta todos los valores obtenidos previamente.

$$A = 33,33 \text{ MPa} + 1,33 \text{ MPa} = 34,66 \text{ MPa} \quad (4.229)$$

$$B = 28,72 \text{ MPa} - 4,6 \text{ MPa} = 24,12 \text{ MPa} \quad (4.230)$$

Con el valor analítico calculado para el esfuerzo cortante se obtuvo el valor correspondiente al modelo 3A MEF que como se ve en la figura 4.31 es de 31,11 MPa para el punto A.

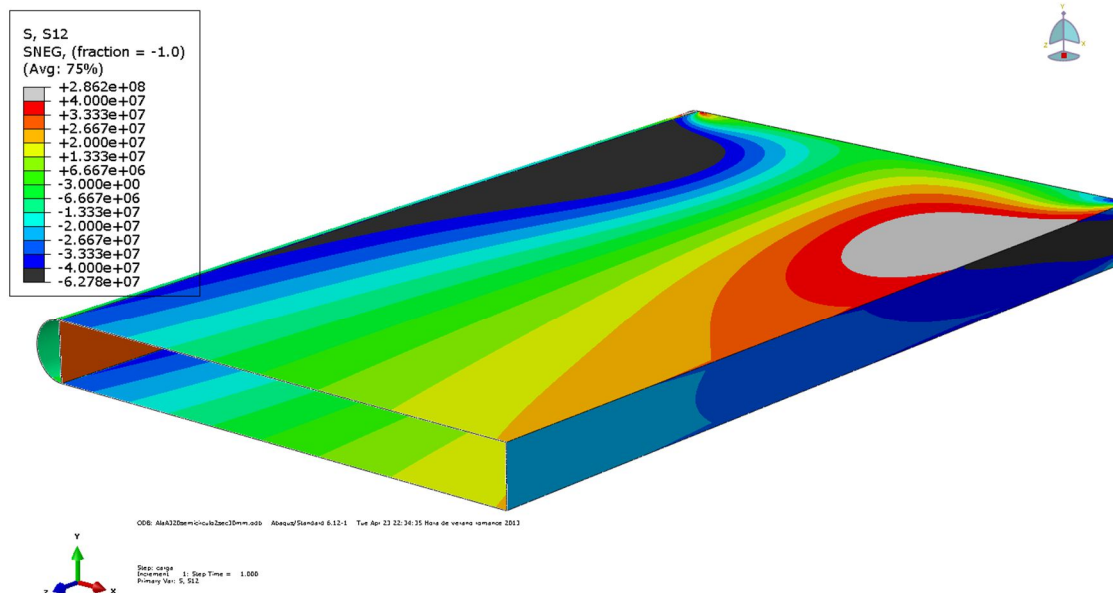


Figura 4.31. Esfuerzos cortantes del modelo 3A MEF.

### **Modelo 3B**

Al igual que para el modelo 3A primeramente se obtuvieron los valores para la sección abierta de los esfuerzos cortantes.

#### **Cortante sección abierta:**

$$\text{Tramo 1-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,4514 \cdot 10^{-4} \quad (4.231)$$

$$\text{Tramo 2-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0193 \quad (4.232)$$

$$\text{Tramo 6-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,4514 \cdot 10^{-4} \quad (4.233)$$

$$\text{Tramo 1-5: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,4514 \cdot 10^{-4} \quad (4.234)$$

$$\text{Tramo 5-4: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0193 \quad (4.235)$$

$$\text{Tramo 6-4: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,4514 \cdot 10^{-4} \quad (4.236)$$

$$\text{Tramo 3-4: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,01965 / \text{Punto C: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,02034 \quad (4.237)$$

El diagrama de los esfuerzos cortantes tendría la misma forma que el de la figura 4.29, solo que con los valores calculados correspondientes al modelo 3B.

Se calcularon los esfuerzos cortantes para las secciones cerradas 1 (4.238) y 2 (4.239).

#### **Cortante sección cerrada:**

$$q_1 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,01096 \quad (4.238)$$

$$q_2 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,02073 \quad (4.239)$$

Al igual que anteriormente, el diagrama correspondiente a los esfuerzos cortantes debido a la carga vertical tendría la misma distribución que el modelo 3A (figura 4.30), solo que con los valores del modelo 3B calculados.

Se obtuvieron los valores de los esfuerzos cortantes debido al momento torsor para los puntos A (4.240) y B (4.241) al ser los más críticos.



Cortante debido al Momento torsor:

$$\tau_A = q_1 - q_2 = -90539 - (-148500) = 57960 \rightarrow 5,04 \text{ MPa} \quad (4.240)$$

$$\tau_B = q_2 = 148500 \rightarrow 12,91 \text{ MPa} \quad (4.241)$$

Al igual que en el modelo 3A se pasó a obtener el esfuerzo cortante total en los puntos A (4.242) y B (4.243).

$$A = 74,7 \text{ MPa} + 5,04 \text{ MPa} = 79,74 \text{ MPa} \quad (4.242)$$

$$B = 83,8 \text{ MPa} - 12,91 \text{ MPa} = 70,89 \text{ MPa} \quad (4.243)$$

Finalmente se obtuvo el valor del esfuerzo cortante máximo para el modelo 3B MEF que es de 78,99 MPa para el punto A como se ve en la figura 4.32.

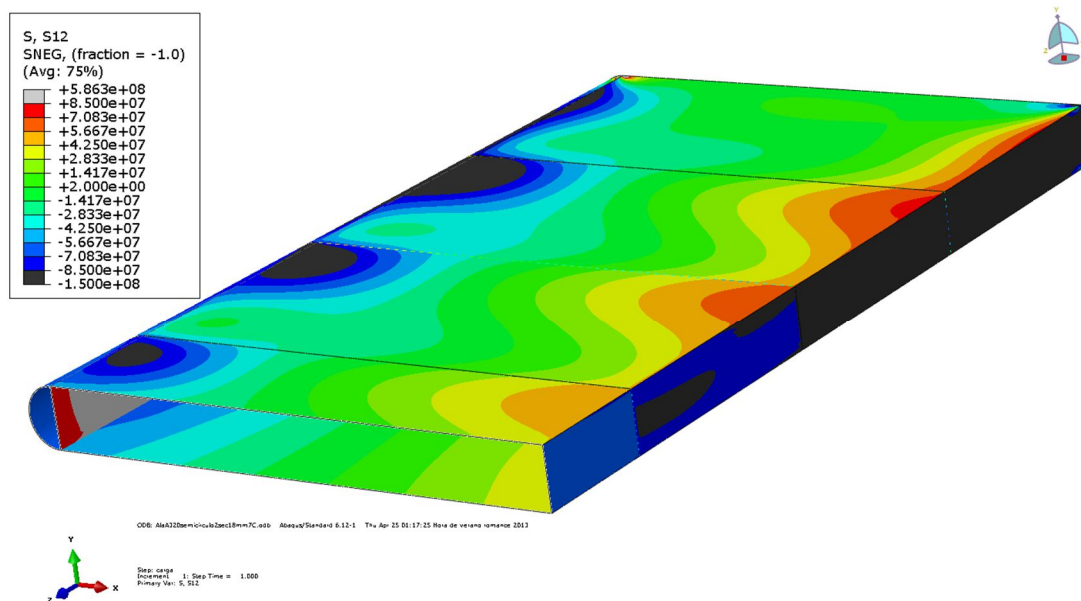


Figura 4.32. Esfuerzos cortantes del modelo 3B MEF.

#### 4.3.4.- DISCUSIÓN DE RESULTADOS DEL MODELO 3

Este modelo 3 tiene un comportamiento idéntico a los 2 modelos anteriores.

Se puede ver en la tabla 4.3 como dato a destacar la diferencia de un 19% en la tensión normal de la cara inferior del modelo 3A. Esto se debe a que el valor de 56,25 MPa está muy próximo a una zona angulosa, lo que provoca una concentración de tensiones y por tanto un aumento de las mismas.

|                      | FLECHA (m)   | ERROR  | $\sigma$ (MPa) | ERROR   | $\tau$ (MPa) | ERROR  | PESO (Kg) | SUPERFICIE (m2) |
|----------------------|--------------|--------|----------------|---------|--------------|--------|-----------|-----------------|
| <b>MODELO 3A</b>     | 0,6          | 8,33%  | 47,11          | 1,82%   | 34,66        | 10,24% | 12574     | 155,2           |
| <b>MODELO 3A MEF</b> | 0,65 / 0,841 | 40,16% | 47,9 / 99,9    | 112,05% | 31,11        |        |           |                 |
| <b>MODELO 3B</b>     | 1,03         | 10,48% | 80,78          | 2,75%   | 79,74        | 0,94%  | 7101      | 169,9           |
| <b>MODELO 3B MEF</b> | 1,138        |        | 83 / 196       | 142,63% | 78,99        |        |           |                 |

Tabla 4.3. Datos del modelo 3.

#### 4.4.-MODELO 4

Este último modelo es una ampliación del modelo 3, en el que se añadió una tercera sección triangular en la parte derecha. De los modelos analíticos es el más aproximado a la sección real de un ala teniendo en cuenta todas las simplificaciones y limitaciones que posee.

En la figura 4.33 se puede ver las dimensiones y distribución de carga del modelo 4.

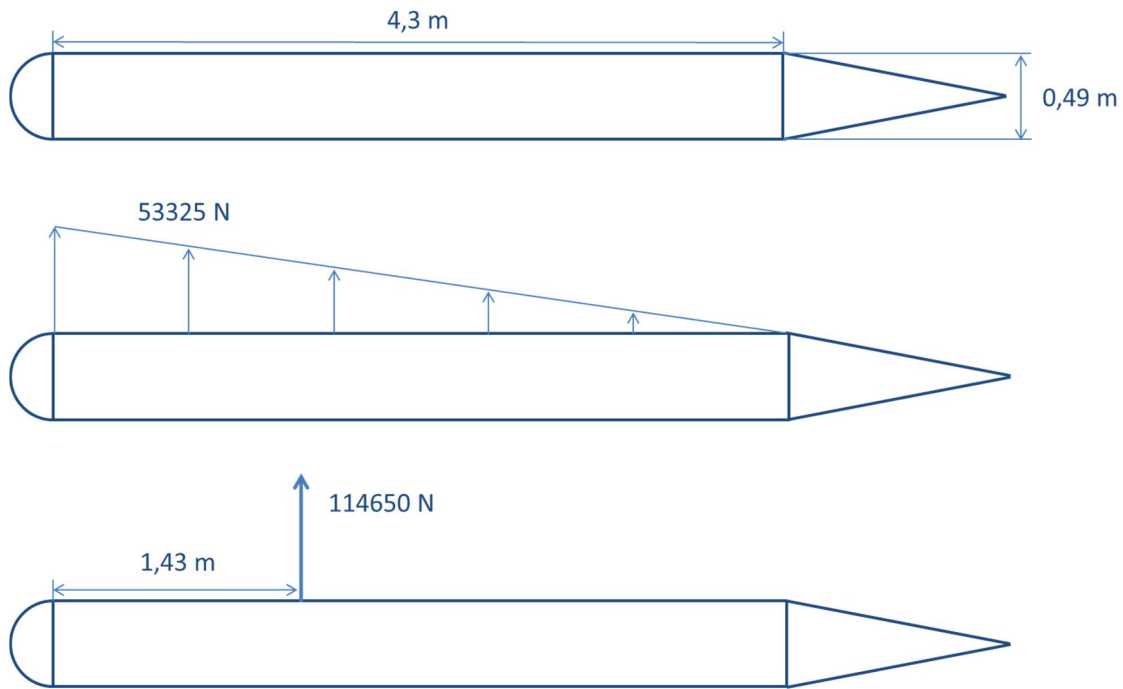


Figura 4.33. Sección acotada y distribución de la carga del modelo 4.

##### 4.4.1.- CÁLCULO DEL ESPESOR

Al igual que en los modelos anteriores, se calculó el espesor mínimo teórico que cumple las solicitaciones de carga teniendo en cuenta la tensión de rotura del aluminio (4.245) y limitación de flecha máxima (4.244).

$$\text{Flecha máxima} = 16\% \rightarrow 2,4m$$

$$F_{max} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} \rightarrow I_x = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot F_{max}} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 2,4} = 4,198 \cdot 10^{-3} m^4 \quad (4.244)$$

$$\sigma_{emp} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} \rightarrow I_x = \frac{y \cdot M_x}{\sigma_{emp}} = \frac{0,245 \cdot 12898800}{490 \cdot 10^6} = 6,449 \cdot 10^{-3} m^4 \quad (4.245)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 15^2}{2} = 12898800 N \cdot m \quad (4.246)$$

A partir del momento de inercia mayor se calculó el espesor mínimo admisible (4.247).

$$I_x = \left( \frac{1}{12} \cdot e \cdot 0,49^3 \right) + 2 \cdot (e \cdot 4,3 \cdot 0,245^2) + \frac{\pi \cdot e \cdot 0,245^3}{2} + 2 \cdot e \left( 1,77 \cdot 0,1225^2 + \frac{0,245^2}{12} \right) = 0,622 \cdot e \quad (4.247)$$
$$e = 0,0103 \text{ m}$$

#### 4.4.2.- FLECHA Y TENSIÓN NORMAL

Siguiendo el mismo proceso que en los modelos anteriores se calculó la flecha en la punta del ala y la tensión normal a mitad de longitud de la misma.

##### Modelo 4A

El modelo 4A tiene un espesor constante en toda la sección de 25 mm que es el mínimo que garantiza el cumplimiento de los requerimientos impuestos.

$$e = 0,025 \text{ m}$$

$$I_x = 0,01555 \text{ m}^4$$

Se calculó la flecha (4.248)

$$Flecha = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 0,01976} = 0,648 \text{ m} \quad (4.248)$$

Posteriormente se calculó la tensión normal a 7,5 m del empotramiento (4.249).

$$\sigma_{7,5m} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} = \frac{0,245 \cdot 3224531}{0,01976} = 50,8 \text{ MPa} \quad (4.249)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 7,5^2}{2} = 3224531 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.250)$$

Una vez calculados los valores analíticos se pasó a obtener los valores del modelo MEF.

La flecha máxima como se ve en la figura 4.34 es de 1,02 m, la cual corresponde a la cara superior del perfil, mientras que la flecha en el centro de la sección es de 0,718 m.

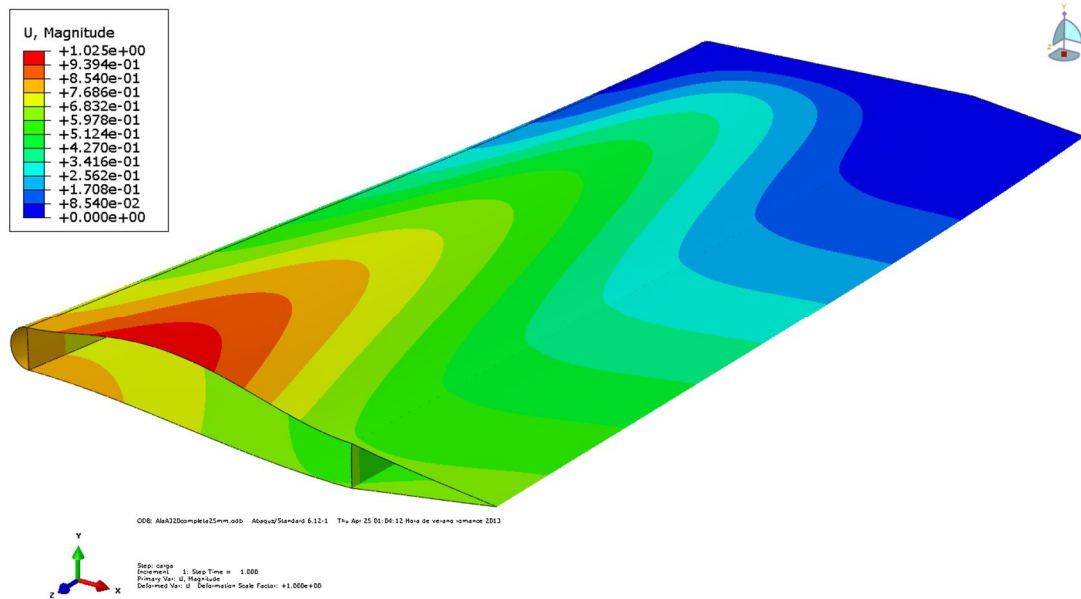


Figura 4.34. Deformada del modelo 4A MEF.

La distribución de tensiones normales en la mitad del modelo se puede ver en la figura 4.35. Como máximas tensiones tenemos 71 MPa en la cara inferior y 161 MPa en la superior. En las zona media de las cara inferior hay 57 MPa y 125 MPa en la superior aproximadamente.

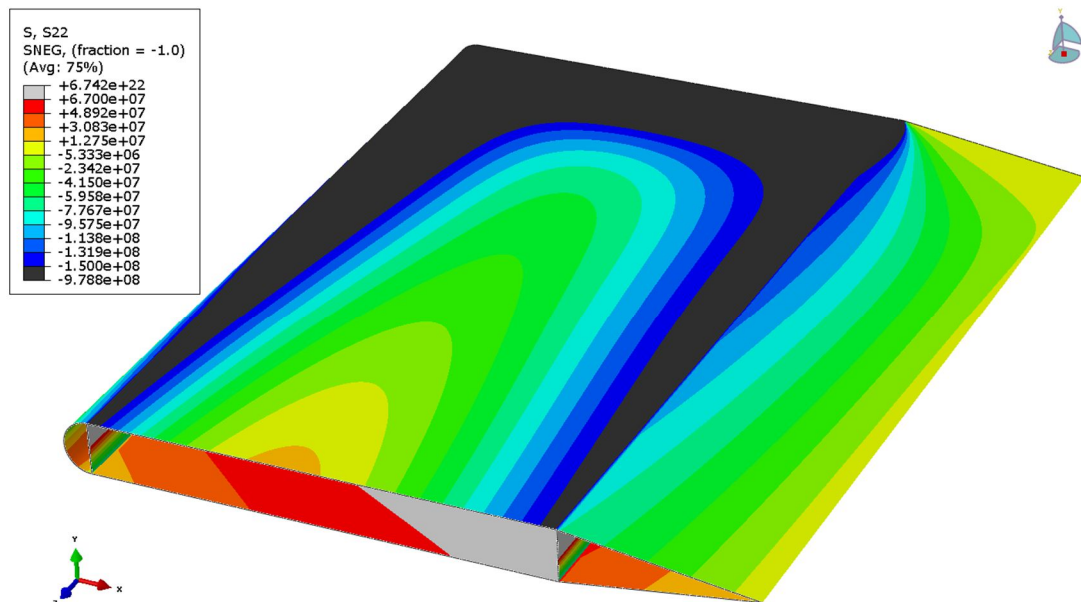


Figura 4.35. Distribución de tensiones normales en el modelo 4A MEF.

### Modelo 4B

Al igual que en los modelos anteriores, el modelo 4B dispone de 7 costillas de 4 mm colocadas equidistantemente unas de otras. Se redujeron los espesores lo máximo posible, siendo de 17,5 mm en las caras superior e inferior y de 10 mm en los tramos verticales, el tramo semicircular y los tramos correspondientes al apéndice triangular situado en el extremo.

$$e_1 = 0,01 \text{ m}$$

$$e_2 = 0,0175 \text{ m}$$

$$I_x = 0,01 \text{ m}^4$$

Se calculó la flecha (4.251) y la tensión normal a 7,5 m del empotramiento (4.252)

$$Flecha = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_x} = \frac{114650 \cdot 15^4}{8 \cdot 72 \cdot 10^9 \cdot 9,52 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{1,007 \text{ m}} \quad (4.251)$$

$$\sigma_{7,5m} = \frac{y \cdot M_x}{I_x} = \frac{0,245 \cdot 3224531}{9,52 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{79 \text{ MPa}} \quad (4.252)$$

$$M_x = \frac{F \cdot x^2}{2} = \frac{114650 \cdot 7,5^2}{2} = 3224531 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.253)$$

La flecha para el modelo 4B MEF es de 1,1 m como se ve en la figura 4.36.

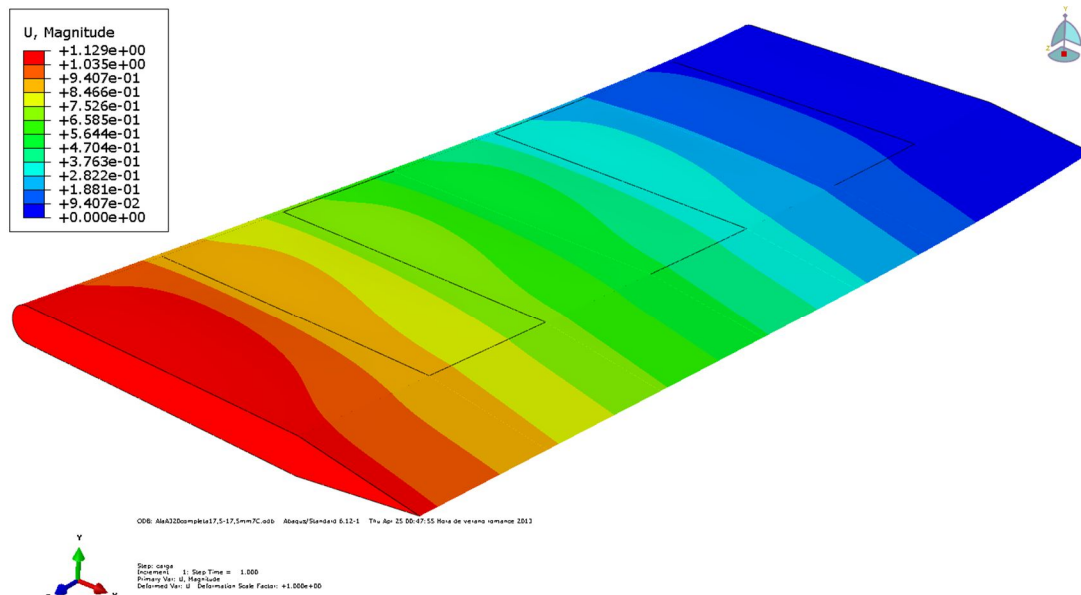


Figura 4.36. Deformada modelo 4B MEF.

Como se ve en la figura 4.37 la tensión normal en la mitad de la longitud del perfil es de 84,4MPa en la cara inferior y de 100 MPa en la superior.

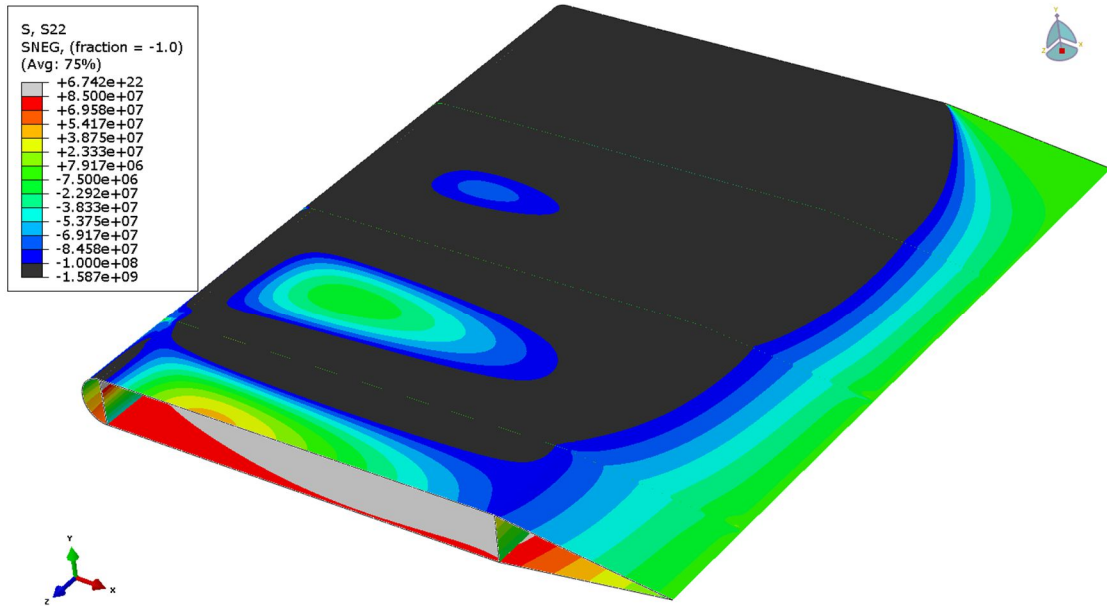


Figura 4.37. Distribución de la tensión normal en el modelo 4B MEF.

#### 4.4.3.- CORTANTES

##### - CÁLCULO GENERAL

##### Cortante debido a la carga vertical

Al igual que en los modelos previos, primeramente se calculó los esfuerzos cortantes de la sección abierta siguiendo los tramos que aparecen en la figura 4.38.



Figura 4.38. Distribución de los tramos de la sección abierta para el modelo 4.

##### TRAMO 1-2

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_1^2 \cdot \sin(7,97) \cdot e_1}{2} \quad (4.254)$$

TRAMO 6-2

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_6^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.255)$$

TRAMO 2-3

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( \frac{L^2 \cdot \text{sen}(7,97) \cdot e_1}{2} + \frac{e_1 \cdot h^2}{8} + \frac{e_2 \cdot h \cdot s_2}{2} \right) \quad (4.256)$$

TRAMO 7-3

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_8^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.257)$$

TRAMO 3-4

$$\begin{aligned} q_a(s) &= -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* \\ &= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( \frac{L^2 \cdot \text{sen}(7,97) \cdot e_1}{2} + \frac{e_1 \cdot h^2}{4} + \frac{e_2 \cdot h \cdot b}{2} + R^2 \cdot e_1 \cdot \text{sen}(\alpha) \right) \end{aligned} \quad (4.258)$$

TRAMO 1-5

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_5^2 \cdot \text{sen}(7,97) \cdot e_1}{2} \quad (4.259)$$

TRAMO 6-5

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_7^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.260)$$

TRAMO 5-4

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( \frac{L^2 \cdot \text{sen}(7,97) \cdot e_1}{2} + \frac{e_1 \cdot h^2}{8} + \frac{e_2 \cdot h \cdot s_4}{2} \right) \quad (4.261)$$



TRAMO 7-4

$$q_a(s) = -K_y \cdot Q_y = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot m_{ex}^* = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_9^2 \cdot e_1}{2} \quad (4.262)$$

- **Secciones cerradas**

Al igual que en el modelo 3 la sección de este modelo dispone de más de una celda, en este caso 3, por lo que para el cálculo se impuso la condición de la fórmula 4.263 siguiendo la distribución de las secciones de la figura 4.39.

$$\int_0^s \frac{q(s)}{e(s)} \cdot ds = 0 \quad (4.263)$$



*Figura 4.39. Distribución de las secciones cerradas para el modelo 4.*

CELDA 1

En la fórmula 4.264 se ve el planteamiento para la celda 1 según la imposición de la ecuación 4.263.

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} (q_a^{12}(s_1) + q_10) \cdot ds_1 - \int_0^{s_6} (q_a^{62}(s_6) + q_20 - q_10) \cdot ds_6 + \int_0^{s_7} (q_a^{65}(s_7) + q_10 - q_20) \\ \cdot ds_7 - \int_0^{s_5} (q_a^{15}(s_5) - q_10) \cdot ds_5 \end{aligned} \quad (4.264)$$

El desarrollo de cada tramo fue el siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} (q_a^{12}(s_1) + q_10) \cdot ds_1 &= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_1^3 \cdot \text{sen}(7,97) \cdot e_1}{6} + q_10 \cdot s_1 \\ &= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,127 \cdot e_1 + 1,767 \cdot q_10 \end{aligned} \quad (4.265)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_6} (q_a^{62}(s_6) + q_2 0 - q_1 0) \cdot ds_6 &= - \left( -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_6^3 \cdot e_1}{6} + q_2 0 \cdot s_6 - q_1 0 \cdot s_6 \right) \\ &= \frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 - 0,245 \cdot q_2 0 + 0,245 \cdot q_1 0 \quad (4.266) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_7} (q_a^{65}(s_7) + q_1 0 - q_2 0) \cdot ds_7 &= \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_7^3 \cdot e_1}{6} + q_1 0 \cdot s_7 - q_2 0 \cdot s_7 \\ &= \frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 0,245 \cdot q_1 0 - 0,245 \cdot q_2 0 \quad (4.267) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_5} (q_a^{15}(s_5) - q_1 0) \cdot ds_5 &= - \left( \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_5^3 \cdot \text{sen}(7,97) \cdot e_1}{6} - q_1 0 \cdot s_5 \right) \\ &= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,127 \cdot e_1 + 1,767 \cdot q_1 0 \quad (4.268) \end{aligned}$$

El resultado final de la celda 1 se ve en la fórmula 4.269.

$$-\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,2491 \cdot e_1 + 4,024 \cdot q_1 0 - 0,49 \cdot q_2 0 \quad (4.269)$$

## CELDA 2

Siguiendo el mismo proceso que para la celda 1 se obtuvo el planteamiento de la celda 2 (4.270).

$$\begin{aligned} \int_0^{s_6} (q_a^{62}(s_6) + q_2 0 - q_1 0) \cdot ds_6 &+ \int_0^{s_2} (q_a^{23}(s_2) + q_2 0) \cdot ds_2 - \int_0^{s_8} (q_a^{73}(s_8) + q_3 0 - q_2 0) \\ &\cdot ds_8 + \int_0^{s_9} (q_a^{74}(s_9) + q_2 0 - q_3 0) \cdot ds_9 - \int_0^{s_4} (q_a^{54}(s_4) - q_2 0) \cdot ds_4 \\ &- \int_0^{s_7} (q_a^{65}(s_7) + q_1 0 - q_2 0) \cdot ds_7 \quad (4.270) \end{aligned}$$

El desarrollo de cada tramo fue el siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^{s_6} (q_a^{62}(s_6) + q_2 0 - q_1 0) \cdot ds_6 &= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_6^3 \cdot e_1}{6} + q_2(0) \cdot s_6 - q_1(0) \cdot s_6 \\ &= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 0,245 \cdot q_2(0) - 0,245 \cdot q_1(0) \quad (4.271) \end{aligned}$$

$$\int_0^{s_2} (q_a^{23}(s_2) + q_2 0) \cdot ds_2 = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( \frac{L^2 \cdot \text{sen}(7,97) \cdot e_1 \cdot s_2}{2} + \frac{e_1 \cdot h^2 \cdot s_2}{8} + \frac{e_2 \cdot h \cdot s_2^2}{4} \right) + q_2(0) \cdot s_2 = -\frac{Q_y}{I_x} (1,06 \cdot e_1 + 2,26 \cdot e_2) + 4,3 \cdot q_2(0) \quad (4.272)$$

$$-\int_0^{s_8} (q_a^{73}(s_8) + q_3 0 - q_2 0) \cdot ds_8 = -\left( -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_8^3 \cdot e_1}{6} + q_3(0) \cdot s_8 - q_2(0) \cdot s_8 \right) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 - 0,245 \cdot q_3(0) + 0,245 \cdot q_2(0) \quad (4.273)$$

$$\int_0^{s_9} (q_a^{74}(s_9) + q_2 0 - q_3 0) \cdot ds_9 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_9^3 \cdot e_1}{6} + q_2(0) \cdot s_9 - q_3(0) \cdot s_9 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 0,245 \cdot q_2(0) - 0,245 \cdot q_3(0) \quad (4.274)$$

$$-\int_0^{s_4} (q_a^{54}(s_4) - q_2 0) \cdot ds_4 = -\left[ \frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( \frac{L^2 \cdot \text{sen}(7,97) \cdot e_1 \cdot s_4}{2} + \frac{e_1 \cdot h^2 \cdot s_4}{8} + \frac{e_2 \cdot h \cdot s_4^2}{4} \right) - q_2(0) \cdot s_4 \right] = -\frac{Q_y}{I_x} (1,06 \cdot e_1 + 2,26 \cdot e_2) + 4,3 \cdot q_2(0) \quad (4.275)$$

$$-\int_0^{s_7} (q_a^{65}(s_7) + q_1 0 - q_2 0) \cdot ds_7 = -\left( \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_7^3 \cdot e_1}{6} + q_1(0) \cdot s_7 - q_2(0) \cdot s_7 \right) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 - 0,245 \cdot q_1(0) + 0,245 \cdot q_2(0) \quad (4.276)$$

El resultado final para la celda 2 aparece en la fórmula 4.277.

$$-\frac{Q_y}{I_x} \cdot (2,12 \cdot e_1 + 4,52 \cdot e_2) - 0,49 \cdot q_1 0 + 9,58 \cdot q_2 0 - 0,49 \cdot q_3 0 \quad (4.277)$$

### CELDA 3

Por último se planteó la ecuación 4.270 para la celda 3 como se ve en la fórmula 4.278.

$$\int_0^{s_8} (q_a^{73}(s_8) + q_3 0 - q_2 0) \cdot ds_8 + \int_0^{s_3} (q_a^{34}(s_6) + q_3 0) \cdot R \cdot d\alpha - \int_0^{s_9} (q_a^{74}(s_9) + q_2 0 - q_3 0) \cdot ds_9 \quad (4.278)$$

El desarrollo de cada tramo quedo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_0^{s_8} (q_a^{73}(s_8) + q_3 0 - q_2 0) \cdot ds_8 &= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_8^3 \cdot e_1}{6} + q_3(0) \cdot s_8 - q_2(0) \cdot s_8 \\ &= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 0,245 \cdot q_3(0) - 0,245 \cdot q_2(0) \quad (4.279) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{s_3} (q_a^{34}(s_6) + q_3 0) \cdot R \cdot d\alpha \\ &= \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot \left( \frac{L^2 \cdot \text{sen}(7,97) \cdot e_1 \cdot \pi}{2} + \frac{e_1 \cdot h^2 \cdot \pi}{4} + \frac{e_2 \cdot h \cdot b \cdot \pi}{2} + R^2 \cdot e_1 \cdot (-\cos\alpha) \right) \right. \\ &\quad \left. + q_3(0) \cdot \pi \right] \cdot R = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,242 \cdot e_1 + 0,8 \cdot e_2) + 0,77 \cdot q_3(0) \quad (4.280) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\int_0^{s_9} (q_a^{74}(s_9) + q_2 0 - q_3 0) \cdot ds_9 &= -\left( \frac{Q_y}{I_x} \cdot \frac{s_9^3 \cdot e_1}{6} + q_2(0) \cdot s_9 - q_3(0) \cdot s_9 \right) \\ &= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 - 0,245 \cdot q_2(0) + 0,245 \cdot q_3(0) \quad (4.281) \end{aligned}$$

El resultado final para la celda 3 aparece en la fórmula 4.282.

$$-\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,2469 \cdot e_1 + 0,8 \cdot e_2) - 0,49 \cdot q_2 0 + 1,26 \cdot q_3 0 \quad (4.282)$$

Para terminar el cálculo de las secciones cerradas se resolvió el sistema creado de tres ecuaciones y se obtuvo  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  (4.283).

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,24 \cdot e_1 + 0,58 \cdot e_2) \\ q_1 &= \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,087 \cdot e_1 + 0,06 \cdot e_2) \quad (4.283) \\ q_3 &= \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,29 \cdot e_1 + 0,86 \cdot e_2) \end{aligned}$$

### Centro de cortantes

Para el cálculo del centro de cortantes se siguió el mismo proceso que para el modelo 2 y 3, ya que el modelo 4 tampoco es simétrico, basándose en la ecuación 4.283. El punto de referencia está situado en el punto 7.

$$\int_0^s q_{(s)} \cdot r_{(s)} \cdot ds = Q_y \cdot c \quad (4.283)$$

Se planteó la ecuación 4.283 para la sección del modelo 4 (4.284).

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^{s_1} (q_a^{12}(s_1) + q_1 0) \cdot r(s) \cdot ds_1 + 2 \cdot \int_0^{s_6} (q_a^{62}(s_6) + q_2 0 - q_1 0) \cdot r(s) \cdot ds_6 + 2 \\ \cdot \int_0^{s_2} (q_a^{23}(s_2) + q_2 0) \cdot r(s) \cdot ds_2 + \int_0^{s_3} (q_a^{34}(s_3) + q_3 0) \cdot r(s) \cdot ds_3 \\ = Q_y \cdot c \quad (4.284) \end{aligned}$$

Una vez se hubo planteada la ecuación para el cálculo del centro de cortantes se desarrolló cada tramo.

#### TRAMO 1-2 Y 1-5

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^{s_1} (q_a^{12}(s_1) + q_1 0) \cdot r(s) \cdot ds_1 = 2 \cdot \left[ \left( -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,127 \cdot e_1 + 1,767 \cdot q_1 0 \right) \cdot 0,85 \right] \\ = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,2159 \cdot e_1 + 3 \cdot q_3 0 \quad (4.285) \end{aligned}$$

#### TRAMO 6-2 Y 6-5

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^{s_6} (q_a^{62}(s_6) + q_2 0 - q_1 0) \cdot r(s) \cdot ds_6 = 2 \\ \cdot \left[ \left( -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,45 \cdot 10^{-3} \cdot e_1 + 0,245 \cdot q_2 0 - 0,245 \cdot q_1 0 \right) \cdot 4,3 \right] \\ = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,021 \cdot e_1 + 2,107 \cdot q_2 0 - 2,107 \cdot q_1 0 \quad (4.286) \end{aligned}$$

TRAMO 2-3 Y 5-4

$$2 \cdot \int_0^{s_2} (q_a^{23}(s_2) + q_2 0) \cdot r(s) \cdot ds_2 = 2 \cdot \left[ -\frac{Q_y}{I_x} (1,06 \cdot e_1 + 2,26 \cdot e_2) + 4,3 \cdot q_2 0 \right] \cdot 0,245$$

$$= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,5194 \cdot e_1 + 1,107 \cdot e_2) + 2,107 \cdot q_2 0 \quad (4.287)$$

TRAMO 3-4

$$\int_0^{s_3} (q_a^{34}(s_3) + q_3 0) \cdot r(s) \cdot ds_3 = \left[ -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,242 \cdot e_1 + 0,8 \cdot e_2) + 0,77 \cdot q_3 0 \right] \cdot 0,245^2$$

$$= -\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,0145 \cdot e_1 + 0,048 \cdot e_2) + 0,046 \cdot q_3 0 \quad (4.288)$$

Los tramos 7-3 y 7-4 no se calcularon ya que el producto de  $q_{(s)} \cdot r_{(s)}$  es 0.

Finalmente se tuvo la ecuación del centro de cortantes desarrollada (4.289).

$$-\frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,77 \cdot e_1 + 1,155 \cdot e_2) + 0,893 \cdot q_1 0 + 4,214 \cdot q_2 0 + 0,046 \cdot q_3 0 = Q_y \cdot c$$

$$(4.289)$$

• **Modelo 4A**

Para el cálculo del centro de cortantes del modelo 4A se siguió el mismo proceso que para los modelos 3. Se tuvo en cuenta los datos geométricos del modelo 4A y las ecuaciones correspondientes a  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  (4.290)

$$e_1 = e_2 = 25mm$$

$$I_x = 0,01555 m^4$$

$$q_2 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,24 \cdot e_1 + 0,58 \cdot e_2) = 1,318 \cdot Q_y$$

$$q_1 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,087 \cdot e_1 + 0,06 \cdot e_2) = 0,236 \cdot Q_y \quad (4.290)$$

$$q_3 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,29 \cdot e_1 + 0,86 \cdot e_2) = 1,849 \cdot Q_y$$

Se sustituyeron todos los datos previos en la ecuación 4.289 y resolvió, obteniendo que el centro de cortantes está situado a 2,751 m a la derecha del punto 7 (4.291).

$$-3,094 \cdot Q_y + 0,21 \cdot Q_y + 5,55 \cdot Q_y + 0,085 \cdot Q_y = Q_y \cdot c \quad (4.291)$$

$$c = 2,751 \text{ m}$$

- **Modelo 4B**

Para el modelo 4B se siguió el mismo proceso que para el 4A. Se sustituyeron todos los datos geométricos y los valores de  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  (4.292) en la ecuación 4.289, quedando la ecuación 4.293. Se resolvió dicha ecuación y se obtuvo que el centro de cortantes está situado en el mismo punto que en el modelo 4A, a 2,751 m a la derecha del punto 7 (4.293).

$$e_1 = 10 \text{ mm}$$

$$e_2 = 17,5 \text{ mm}$$

$$I_x = 0,01 \text{ m}^4$$

$$q_2 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,24 \cdot e_1 + 0,58 \cdot e_2) = 1,255 \cdot Q_y$$

$$q_1 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,087 \cdot e_1 + 0,06 \cdot e_2) = 0,192 \cdot Q_y \quad (4.292)$$

$$q_3 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot (0,29 \cdot e_1 + 0,86 \cdot e_2) = 1,795 \cdot Q_y$$

$$-2,79 \cdot Q_y + 0,171 \cdot Q_y + 5,288 \cdot Q_y + 0,082 \cdot Q_y = Q_y \cdot c \quad (4.293)$$

$$c = 2,751 \text{ m}$$

#### Cortante debido al momento torsor

Para el cálculo del cortante debido al momento torsor en el modelo 4 se siguió el mismo proceso que para el modelo 3, teniendo únicamente en cuenta que ahora se disponía de 3 celdas en vez de 2.

Se utilizaron las ecuaciones 4.294 (esfuerzo cortante), 4.295 (valores J) y los parámetros C para el cálculo final del valor del cortante.

$$q_i = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_i}{\sum J_i} \quad (4.294)$$

$$J_i = \frac{4 \cdot \Omega_i^2}{\oint_i \frac{ds}{e(s)}} \quad (4.295)$$

La distribución de los momentos torsores aparece en la figura 4.40.



Figura 4.40. Distribución y sentido de los momentos torsores del modelo 4.

- **Constantes C**

El cálculo de las constantes C se realizó igual que en el modelo 3, pero al tener 3 celdas fue algo más tedioso, por lo que se pasó a calcularlas dejándolas de forma indicada para posteriormente sustituir los datos correspondientes a cada modelo.

Primeramente se plantearon las ecuaciones de compatibilidad que les correspondía (4.296).

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \oint_1 \frac{ds}{e} + (C_1 - C_2) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} &= \Omega_1 \\ C_2 \cdot \oint_2 \frac{ds}{e} + (C_2 - C_1) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} + (C_2 - C_3) \cdot \oint_{23} \frac{ds}{e} &= \Omega_2 \\ C_3 \cdot \oint_3 \frac{ds}{e} + (C_3 - C_2) \cdot \oint_{23} \frac{ds}{e} &= \Omega_3 \end{aligned} \quad (4.296)$$

Para simplificar las ecuaciones 4.296 se realizó un cambio de variable, quedando las ecuaciones como se ven en 4.297.

$$x = \oint_1 \quad ; y = \oint_2 \quad ; z = \oint_3 \quad ; t = \oint_{12} \quad ; u = \oint_{23}$$



$$\begin{aligned}
 C_1 x + C_1 t - C_2 t &= \Omega_1 \rightarrow C_1(x + t) - C_2 t = \Omega_1 \\
 C_2 y + C_2 t - C_1 t + C_2 u - C_3 u &= \Omega_2 \rightarrow C_2(y + t + u) - C_1 t - C_3 u = \Omega_2 \\
 C_3 z + C_3 u - C_2 u &= \Omega_3 \rightarrow C_3(z + u) - C_2 u = \Omega_3
 \end{aligned} \quad (4.297)$$

Para terminar se despeja cada constante C y se dejó indicada en función del resto de variables (4.298).

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\Omega_1 + C_2 t}{(x + t)} \\
 C_3 &= \frac{\Omega_3 + C_2 u}{(z + u)} \\
 C_2 &= \frac{\Omega_2 + t \cdot \left( \frac{\Omega_1 + C_2 t}{(x + t)} \right) + u \cdot \left( \frac{\Omega_3 + C_2 u}{(z + u)} \right)}{(y + t + u)}
 \end{aligned} \quad (4.298)$$

- **Modelo 4A**

Con todos los datos geométricos y ecuaciones previas se pasó al cálculo concreto para el modelo 4A.

$$e_1 = e_2 = 25 \text{ mm}$$

$$I_x = 0,01555 \text{ m}^4$$

$$c = 2,751 \text{ m}$$

Se empezaron calculando los valores de J (4.299) y su suma (4.300).

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{4 \cdot \Omega_1^2}{\oint_1 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot \left( \frac{\pi \cdot R^2}{2} \right)^2}{\frac{\pi \cdot R}{e_1} + \frac{h}{e_1}} = \frac{0,0355}{30,8 + 19,6} = 6,94 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\
 J_2 &= \frac{4 \cdot \Omega_2^2}{\oint_2 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot (b \cdot h)^2}{\frac{2b}{e_2} + \frac{2h}{e_1}} = \frac{17,75}{344 + 39,2} = 0,046 \text{ m}^4 \\
 J_3 &= \frac{4 \cdot \Omega_3^2}{\oint_3 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot \left( \frac{h \cdot x}{2} \right)^2}{\frac{2 \cdot L}{e_1} + \frac{h}{e_1}} = \frac{0,73}{141 + 19,6} = 4,57 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4
 \end{aligned} \quad (4.299)$$

$$\sum J = 0,051 \text{ m}^4 \quad (4.300)$$

Se continuó con el cálculo de los valores de C a partir de las ecuaciones de compatibilidad (4.301).

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \oint_1 \frac{ds}{e} + (C_1 - C_2) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} &= \Omega_1 \\ C_2 \cdot \oint_2 \frac{ds}{e} + (C_2 - C_1) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} + (C_2 - C_3) \cdot \oint_{23} \frac{ds}{e} &= \Omega_2 \quad (4.301) \\ C_3 \cdot \oint_3 \frac{ds}{e} + (C_3 - C_2) \cdot \oint_{23} \frac{ds}{e} &= \Omega_3 \end{aligned}$$

Se obtuvieron los valores de los cambios de variable que se habían realizado anteriormente (4.302) y de los valores  $\Omega$  (4.303).

$$\begin{aligned} x &= \oint_1 \frac{ds}{e} = \frac{\pi \cdot R}{e_1} = 30,79 \\ y &= \oint_2 \frac{ds}{e} = \frac{2 \cdot b}{e_2} = 344 \quad (4.302) \\ z &= \oint_3 \frac{ds}{e} = \frac{2 \cdot L}{e_1} = 141 \\ u = t &= \oint_{12} \frac{ds}{e} = \frac{h}{e_1} = 19,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 0,094 \text{ m}^2 \\ \Omega_2 &= 2,107 \text{ m}^2 \quad (4.303) \\ \Omega_3 &= 0,428 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Con todos los datos relativos a C calculados, se sustituyeron en la ecuación 4.298 y se obtuvieron los valores de C.

$$C_1 = 4,24 \cdot 10^{-3}$$

$$C_2 = 6,11 \cdot 10^{-3}$$

$$C_3 = 3,41 \cdot 10^{-3}$$

Por último se calculó el valor del esfuerzo cortante debido al momento torsor (4.304) para las 3 secciones (4.305).

$$M_z = Q_y \cdot x = 859950 \cdot 1,32 = 1135134 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.304)$$

$$q_1 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_1}{\sum J} = 188743 \text{ N/m}$$

$$q_2 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_2}{\sum J} = 271987 \text{ N/m} \quad (4.305)$$

$$q_3 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_2}{\sum J} = 151796 \text{ N/m}$$

- **Modelo 4B**

Se realizó el mismo proceso que para el modelo 4A, con los datos geométricos detallados a continuación correspondientes a este modelo.

$$e_1 = 10 \text{ mm}$$

$$e_2 = 17,5 \text{ mm}$$

$$I_x = 0,01 \text{ m}^4$$

$$c = 2,751 \text{ m}$$

Se calcularon los valores de J (4.306) y su suma total (4.307)

$$J_1 = \frac{4 \cdot \Omega_1^2}{\oint_1 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot \left( \frac{\pi \cdot R^2}{2} \right)^2}{\frac{\pi \cdot R}{e_1} + \frac{h}{e_1}} = \frac{0,0355}{76,9 + 49} = 2,82 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$J_2 = \frac{4 \cdot \Omega_2^2}{\oint_2 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot (b \cdot h)^2}{\frac{2b}{e_2} + \frac{2h}{e_1}} = \frac{17,75}{491 + 98} = 0,03 \text{ m}^4 \quad (4.306)$$

$$J_3 = \frac{4 \cdot \Omega_3^2}{\oint_3 \frac{ds}{e}} = \frac{4 \cdot \left( \frac{h \cdot x}{2} \right)^2}{\frac{2 \cdot L}{e_1} + \frac{h}{e_1}} = \frac{0,73}{353 + 49} = 1,81 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$\sum J = 0,032 \text{ m}^4 \quad (4.307)$$

Se plantearon las ecuaciones de compatibilidad para obtener los valores de C (4.308).

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \oint_1 \frac{ds}{e} + (C_1 - C_2) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} &= \Omega_1 \\ C_2 \cdot \oint_2 \frac{ds}{e} + (C_2 - C_1) \cdot \oint_{12} \frac{ds}{e} + (C_2 - C_3) \cdot \oint_{23} \frac{ds}{e} &= \Omega_2 \\ C_3 \cdot \oint_3 \frac{ds}{e} + (C_3 - C_2) \cdot \oint_{23} \frac{ds}{e} &= \Omega_3 \end{aligned} \quad (4.308)$$

Se obtuvieron los valores de los cambios de variable que realizamos anteriormente (4.309) y de los valores  $\Omega$  (4.310).

$$\begin{aligned} x &= \oint_1 \frac{ds}{e} = \frac{\pi \cdot R}{e_1} = 76,9 \\ y &= \oint_2 \frac{ds}{e} = \frac{2 \cdot b}{e_2} = 491 \\ z &= \oint_3 \frac{ds}{e} = \frac{2 \cdot L}{e_1} = 353 \\ u &= t = \oint_{12} \frac{ds}{e} = \frac{h}{e_1} = 49 \end{aligned} \quad (4.309)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 0,094 \text{ m}^2 \\ \Omega_2 &= 2,107 \text{ m}^2 \\ \Omega_3 &= 0,428 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (4.310)$$

Se sustituyeron todos los datos calculados en la ecuación 4.298 y se obtuvieron los valores de C.

$$\begin{aligned} C_1 &= 2,25 \cdot 10^{-3} \\ C_2 &= 3,89 \cdot 10^{-3} \\ C_3 &= 1,53 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Para terminar se procedió a calcular el valor del esfuerzo cortante debido al momento torsor (4.311) para las 3 secciones (4.312).

$$M_z = Q_y \cdot x = 859950 \cdot 1,32 = 1135134 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4.311)$$

$$q_1 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_1}{\sum J} = 159628 \text{ N/m}$$

$$q_2 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_2}{\sum J} = 275979 \text{ N/m} \quad (4.312)$$

$$q_3 = 2 \cdot M_T \cdot \frac{C_2}{\sum J} = 108547 \text{ N/m}$$

#### **- CÁLCULO CONCRETO**

A continuación se calculó el valor de los esfuerzos cortantes totales para cada modelo teniendo en cuenta los datos previamente calculados.

##### **Modelo 4A**

Se empezó calculando los valores para la sección abierta del modelo 4A (4.313).

##### **Cortante sección abierta:**

$$\text{Tramo 1-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 5,4299 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Tramo 6-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 7,5031 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Tramo 2-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,03252$$

$$\text{Tramo 7-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 7,5031 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Tramo 3-4: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,03327 / \text{Punto C: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,03477 \quad (4.313)$$

$$\text{Tramo 1-5: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 5,4299 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Tramo 6-5: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 7,5031 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Tramo 5-4: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,03252$$

$$\text{Tramo 7-4: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 7,5031 \cdot 10^{-4}$$

Se representó el diagrama de cortantes para la sección abierta que se puede ver en la figura 4.41.

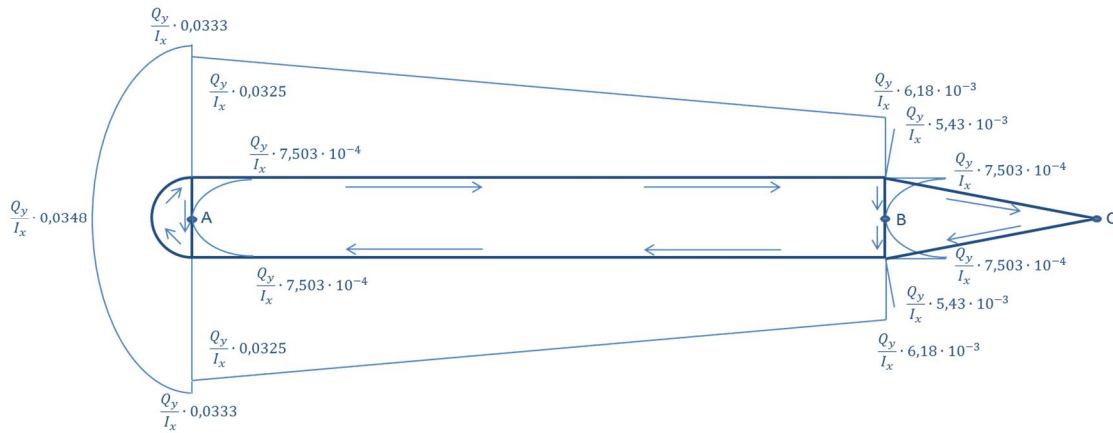


Figura 4.41. Diagrama de cortantes de la sección abierta del modelo 4A.

Se continuó calculando los cortantes para las secciones cerradas (4.314).

Cortante sección cerrada:

$$q_1 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,675 \cdot 10^{-3}$$

$$q_2 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0205 \quad (4.314)$$

$$q_3 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,02875$$

Una vez que se tuvieron todos los valores relativos a los esfuerzos cortantes debido a la carga vertical, se pudo representar el diagrama correspondiente para los esfuerzos cortantes debido a la carga vertical como se ve en la figura 4.42.

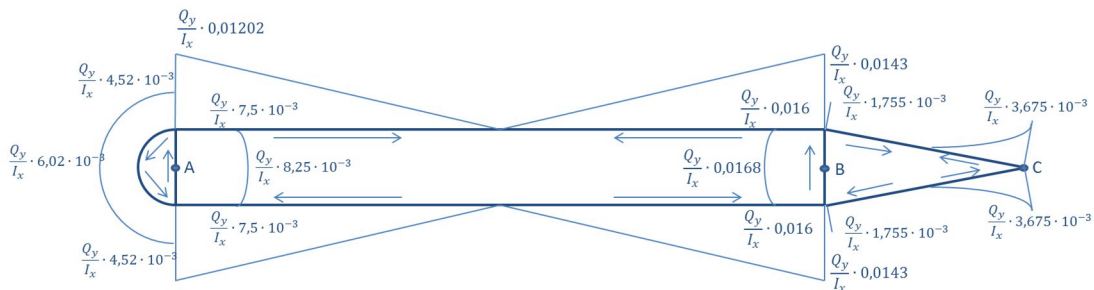


Figura 4.42. Diagrama de cortantes para la carga vertical del modelo 4A.

De los esfuerzos cortantes faltaba calcular el debido al momento torsor para los puntos A, B y C, que son los más críticos (4.315).

Cortante debido al Momento torsor:

$$\tau_A = q_2 - q_1 = 271987 - 188743 = 93961 \rightarrow 3,33 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = q_2 - q_3 = 271987 - 151796 = 120191 \rightarrow 4,8 \text{ MPa} \quad (4.315)$$

$$\tau_C = q_1 = 188743 \rightarrow 7,55 \text{ MPa}$$

Para terminar se calculó el esfuerzo cortante final para los puntos A, B y C (4.316) teniendo en cuenta todos los valores previamente calculados.

$$A = 18,25 \text{ MPa} + 3,33 \text{ MPa} = 21,58 \text{ MPa}$$

$$B = 37,22 \text{ MPa} - 4,8 \text{ MPa} = 32,42 \text{ MPa} \quad (4.316)$$

$$C = 13,31 \text{ MPa} + 7,55 \text{ MPa} = 20,86 \text{ MPa}$$

Una vez se obtuvieron los valores analíticos del modelo 4A, se obtuvo el valor del cortante para el modelo 4A MEF que es de 39 MPa para el punto A y 4,5 MPa para el punto B como se ve en la figura 4.43.

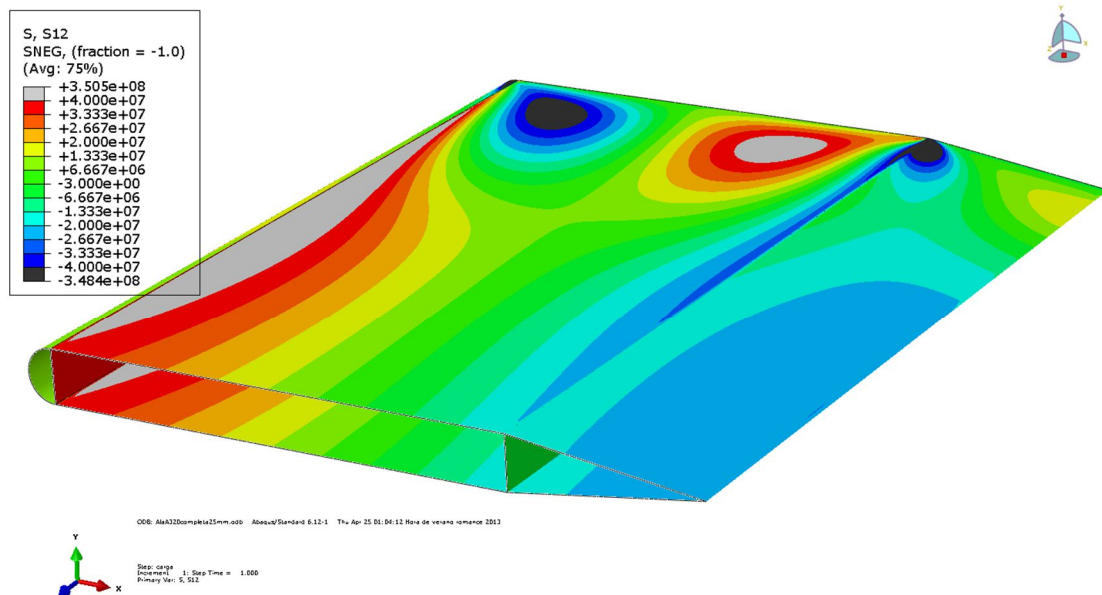


Figura 4.43. Esfuerzos cortantes del modelo 4A MEF.

#### **Modelo 4B**

Se siguió el mismo proceso que para el modelo 4A, se empezó calculando los valores de los esfuerzos cortantes para la sección abierta (4.317).

Cortante sección abierta:

$$\text{Tramo 1-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,1719 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Tramo 6-2: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,0012 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Tramo 2-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0209$$

$$\text{Tramo 7-3: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,0012 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Tramo 3-4: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0212 / \text{Punto C: } q_a(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0218 \quad (4.317)$$

$$\text{Tramo 1-5: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 2,1719 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Tramo 6-5: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,0012 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Tramo 5-4: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,0209$$

$$\text{Tramo 7-4: } q_a(s) = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 3,0012 \cdot 10^{-4}$$

El diagrama de los esfuerzos cortantes tendría la misma forma que el de la figura 4.41 solo que con los valores calculados correspondientes al modelo 4B.

Se calcularon los esfuerzos cortantes para las secciones cerradas 1, 2 y 3 (4.318).

Cortante sección cerrada:

$$q_1 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 1,92 \cdot 10^{-3}$$

$$q_2 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,01255 \quad (4.318)$$

$$q_3 = \frac{Q_y}{I_x} \cdot 0,01795$$



El diagrama correspondiente a los esfuerzos cortantes debido a la carga vertical del modelo 4B tendría la misma forma que el modelo 4A (figura 4.42), pero con los valores correspondientes a los calculados para el modelo 4B.

Para terminar los cálculos de los esfuerzos cortantes quedaba únicamente el debido al momento torsor para los puntos A, B y C (4.319) al ser los más críticos.

Cortante debido al Momento torsor:

$$\tau_A = q_2 - q_1 = 275979 - 159628 = 116351 \rightarrow 11,63 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = q_2 - q_3 = 275979 - 108547 = 167432 \rightarrow 16,74 \text{ MPa} \quad (4.319)$$

$$\tau_C = q_1 = 159628 \rightarrow 15,96 \text{ MPa}$$

Con todos los valores obtenidos relativos a los esfuerzos cortantes podía calcular finalmente el esfuerzo cortante total para los puntos A, B y C (4.320).

$$A = 46,44 \text{ MPa} + 11,63 \text{ MPa} = 58,07 \text{ MPa}$$

$$B = 91,41 \text{ MPa} - 16,74 \text{ MPa} = 74,67 \text{ MPa} \quad (4.320)$$

$$C = 33,1 \text{ MPa} + 15,96 \text{ MPa} = 49,06 \text{ MPa}$$

Por último, para terminar todo lo relativo al modelo 4, se obtuvo el valor del esfuerzo cortante máximo para el modelo 4B MEF que como se ve en la figura 4.44 es de 64,31 MPa para el punto B.

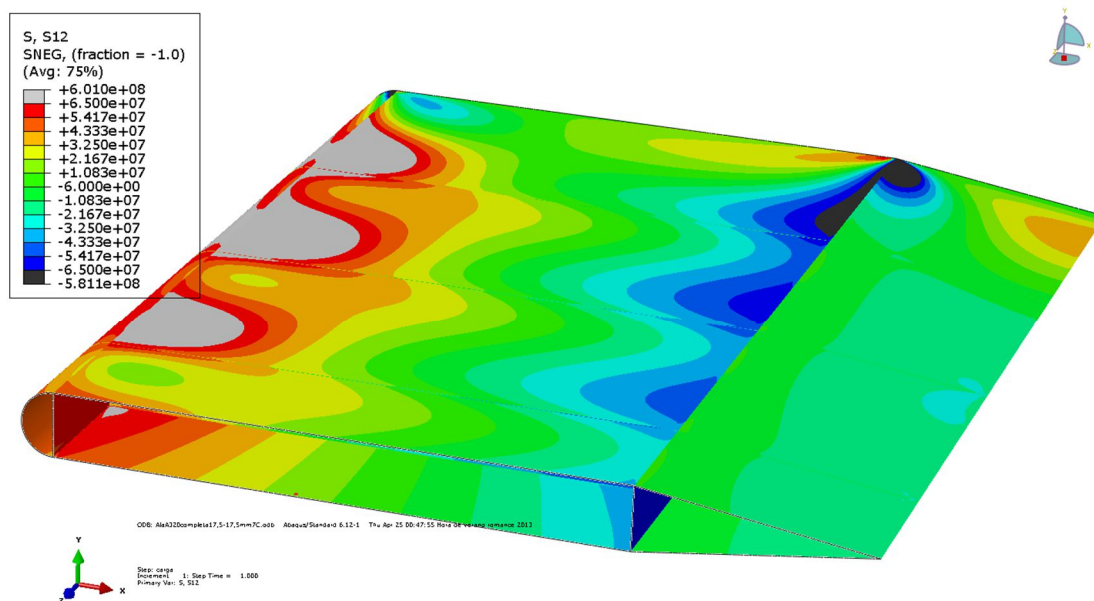


Figura 4.44. Esfuerzos cortantes del modelo 4B MEF.

#### 4.4.4.- DISCUSIÓN DE RESULTADOS DEL MODELO 4

Este modelo tiene un comportamiento similar a los anteriores pero presenta algunas anomalías.

En los datos relativos a la tensión normal que se podían ver en la figura 4.35, se tienen unas tensiones muy elevadas como máximas. Esto se debe a que se encuentran al lado de la unión de dos zonas formando un ángulo recto y es una zona propensa a concentración de tensiones. En cambio si se toman valores en zonas más centradas, alejadas de las zonas de concentración de tensiones, el valor es más próximo al analítico siguiendo el patrón de los modelos previos.

Otro punto anómalo que se tiene en este modelo es relativo a las tensiones de cortadura en el modelo 4<sup>a</sup>, donde observando la tabla 4.4 y la figura 4.43 se ve que no concuerdan bien los datos analíticos y del MEF. La explicación que se ha encontrado a este hecho es que por algún motivo el modelo presenta un fallo geométrico. Este puede ser que la sección transversal no esté perfectamente unida a las caras superior e inferior y por tanto sus tensiones sean muy bajas como así se ve en la figura 4.43.

|               | FLECHA (m)   | ERROR  | $\sigma$ (MPa) | ERROR   | $\tau$ (MPa) | ERROR  | PESO (Kg) | SUPERFICIE (m2) |
|---------------|--------------|--------|----------------|---------|--------------|--------|-----------|-----------------|
| MODELO 4A     | 0,648        | 10,80% | 50,8           | 12,20%  | 32,42        | 720%   | 14057     | 208,25          |
| MODELO 4A MEF | 0,718 / 1,02 | 57,40% | 57 / 141       | 177,56% | 4,5          |        |           |                 |
| MODELO 4B     | 1,007        | 9,23%  | 79             | 6,83%   | 74,67        | 13,87% | 8433      | 223             |
| MODELO 4B MEF | 1,1          |        | 84,4 / 100     | 26,58%  | 64,31        |        |           |                 |

Tabla 4.4. Datos del modelo 4.

## **4.5.- DISCUSIÓN DE RESULTADOS**

El principal objetivo de este apartado era comparar el método analítico con el MEF para poder validar el uso del MEF como método de cálculo. A la vista de los resultados que se pueden ver en la tabla 4.5 se pudo concluir que el MEF es un método válido, ya que las diferencias entre datos iguales no superaron la mayoría un error del 10%, el cual es asumible.

Se puede observar también que aunque la mayoría de los errores no superaron el 10%, se encontraron que los valores de las tensiones normales de los modelos MEF correspondientes a la cara superior fueron del doble. La explicación a este fenómeno se debe a que sobre esta cara estaba aplicada la carga y por tanto sufrió unas solicitaciones mucho mayores debido a la especial concentración de fuerzas que tenía.

Por este mismo fenómeno se tenía igualmente un aumento de las flechas que se alcanzaban en las caras superiores de los modelos A MEF, donde los errores se encontraron por encima del 30%.

Otra conclusión importante que se obtuvo de la realización de estos modelos es que el uso de elementos rigidizadores como son las costillas tuvo un efecto muy beneficioso sobre la estructura. Con un aumento de entorno al 10% de superficie de material se consiguieron unas reducciones de peso cercanas al 50%. Un ejemplo claro de esto se vio en los valores relativos a las flechas donde el uso de las costillas hizo desaparecer el efecto perjudicial de aplicar la carga únicamente en la cara superior. Por el contrario las costillas no consiguieron eliminar la concentración de tensiones en la cara superior ya que entre las costillas la superficie superior seguía estando expuesta a la carga sin ningún tipo de elemento que la rigidizara.

Por último se vio que la tensión de cortadura en el modelo 4A MEF no seguía lo predicho por los cálculos analíticos. Como se ya se comentó en el apartado de discusión de resultados del modelo 4 esto se debió a un posible fallo de diseño del modelo. La conclusión que se obtuvo de este fallo es que a pesar de que el MEF es muy potente y permite el cálculo de estructuras que mediante cálculos analíticos serían inabordables, no deja de estar sujeto a posibles fallos y por tanto se necesita un control sobre los procesos de diseño como sobre los resultados obtenidos.

|            | MODELO 1A           | MODELO 1B          | MODELO 2A          | MODELO 2B           | MODELO 3A            | MODELO 3B        | MODELO 4A        | MODELO 4B          |
|------------|---------------------|--------------------|--------------------|---------------------|----------------------|------------------|------------------|--------------------|
| FLECHA     | 0,522 m             | 1,058 m            | 0,509 m            | 1,041 m             | 0,6 m                | 1,03 m           | 0,648 m          | 1,007 m            |
|            | 0,564 m / 0,692 m   | 1,15 m             | 0,562 m / 0,703 m  | 1,154 m             | 0,65 m / 0,841 m     | 1,138 m          | 0,718 m / 1,02 m | 1,1 m              |
| ERROR      | 8%                  | 8,69%              | 10,41%             | 10,85%              | 8,33%                | 10,48%           | 10,80%           | 9,23%              |
|            | 32,56%              |                    | 38,11%             |                     | 40,16%               |                  | 57,40%           |                    |
| $\sigma$   | 40,9 MPa            | 82,9 MPa           | 39,98 MPa          | 81,6 MPa            | 47,11 MPa            | 80,78 MPa        | 50,8 MPa         | 79 MPa             |
|            | 42,3 MPa / 79,3 MPa | 84,2 MPa / 199 MPa | 40 MPa / 81,39 MPa | 83,21 MPa / 202 MPa | 56,25 MPa / 99,9 MPa | 83 MPa / 196 MPa | 57 MPa / 141 MPa | 84,4 MPa / 100 MPa |
| ERROR      | 3,40%               | 1,56%              | 0,05%              | 1,97%               | 19,00%               | 2,75%            | 12,20%           | 6,83%              |
|            | 93,88%              | 140%               | 103,57%            | 147,54%             | 112,05%              | 142,63%          | 177,56%          | 26,58%             |
| $\tau$     | 28,83 MPa           | 86,17 MPa          | 28,88 MPa          | 85,54 MPa           | 34,66 MPa            | 79,74 MPa        | 32,42            | 74,67 MPa          |
|            | 30,2 MPa            | 85,11 MPa          | 30,54 MPa          | 86,1 MPa            | 31,11 MPa            | 78,99 MPa        | 4,5              | 64, 31 MPa         |
| ERROR      | 4,75%               | 1,25%              | 5,43%              | 0,65%               | 10,24%               | 0,94%            | 720%             | 13,87%             |
| PESO       | 13967               | 6904               | 14375              | 7032                | 12574                | 7101             | 14057            | 8433               |
| SUPERFICIE | 143,7               | 158,5              | 147,9              | 162,6               | 155,2                | 169,9            | 208,25           | 223                |

Tabla 4.5. Datos de los modelos 1, 2, 3 y 4

## **5.- MODELOS EN DETALLE**

En los dos apartados previos se han explicado todos los datos, cálculos y resultados de los modelos 1, 2, 3 y 4. En este apartado se ha realizado lo mismo pero referidos a los modelos 4 y 5. Estos modelos tienen en común que su sección es un perfil NACA, lo que provoca que el cálculo analítico sea de gran complejidad. Por este motivo solamente se llevó a cabo el análisis mediante MEF.

A continuación se ha pasado a detallar dimensiones, espesores, distribución de presiones y resultados obtenidos para los modelos 4 y 5.

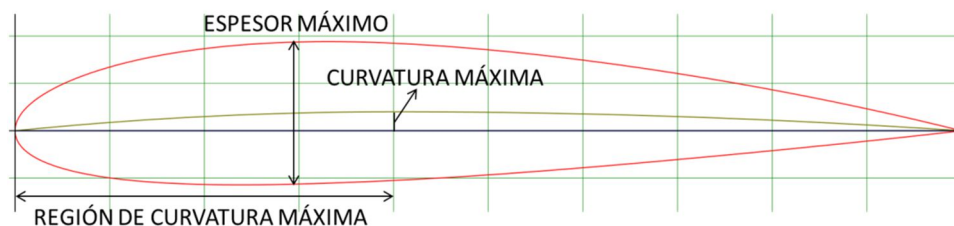
### **5.1.-ESPECIFICACIONES GEOMÉTRICAS**

Como se ha comentado previamente, ambos modelos tienen en común la sección, un perfil NACA. Se intentó por varios medios intentar conseguir el perfil NACA exacto que utiliza Airbus para el modelo A320, pero fue posible obtenerlo ya que para cualquier fabricante aeronáutico este dato es guardado celosamente. Hay que tener en cuenta que el estudio fluidodinámico del ala de cualquier aeronave es fundamental y conseguir un perfil lo más eficiente posible en todos los aspectos marca la diferencia entre los diferentes fabricantes. Por este motivo esta información es de difícil acceso, para evitar que llegue a los competidores.

Al no disponer del perfil NACA exacto se tomó como sección el perfil NACA 2415, que por la información recopilada se cree que puede ser aproximado al perfil NACA real del Airbus A320.

En el apartado 2.2.3 (Perfil NACA) se habló de los perfiles NACA y de la nomenclatura asociada a ellos. Siguiendo las pautas descritas para los perfiles NACA de 4 dígitos se pudo determinar las características y dimensiones asociadas al perfil NACA 2415. A continuación se ha detallado el significado de cada dígito a la vez que se pueden ver representados en la figura 5.1:

- Dígito 2: Indica que la curvatura máxima es un 2% de la cuerda
- Dígito 4: Indica que la curvatura máxima está localizada a una distancia del 40% del total de la cuerda partiendo del borde de ataque.
- Dígitos 15: Indica que el espesor máximo es un 15% de la cuerda.

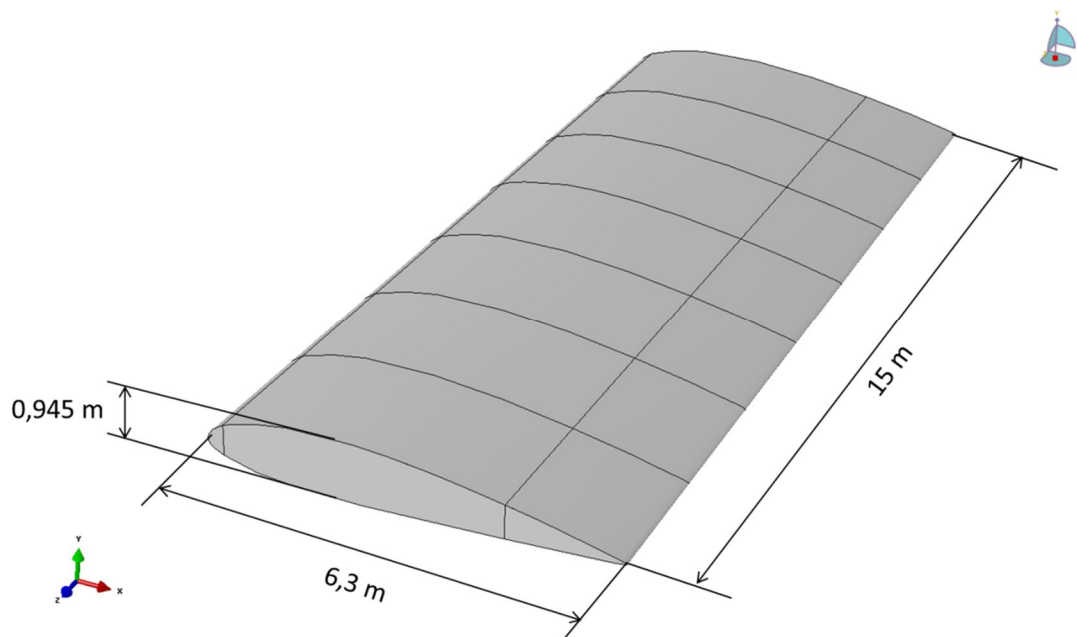


*Figura 5.1. Perfil NACA 2415.*

Una vez se ha descrito la forma que posee el perfil NACA 2415 se ha pasado a describir la forma, dimensiones y espesores concretos para los modelos 5 y 6.

### **Modelo 5**

Este modelo posee una sección constante y como se ha mencionado previamente esta sección es un perfil NACA 2415. La cuerda del perfil (longitud total) es de 6,3 m, prácticamente la longitud de la sección del modelo 4 (6,295 m), y tiene una anchura máxima de 0,945 m (15% de la cuerda). La longitud del ala desde el encastre hasta la punta de ala es de 15 m al igual que en todos los modelos previos. En la figura 5.2 se puede ver una imagen del modelo creado en MEF con las dimensiones generales.



*Figura 5.2. Modelo 5 MEF acotado.*

Siguiendo el mismo patrón que el modelo 4, la sección transversal está dividida en tres secciones como se ve en la figura 5.3. La sección 1 tiene una longitud de 0,245 m, la sección 2 4,3 m y la sección 3 1,75 m. A su vez el modelo dispone de 7 costillas situadas equidistantes unas de otras (figura 5.4).

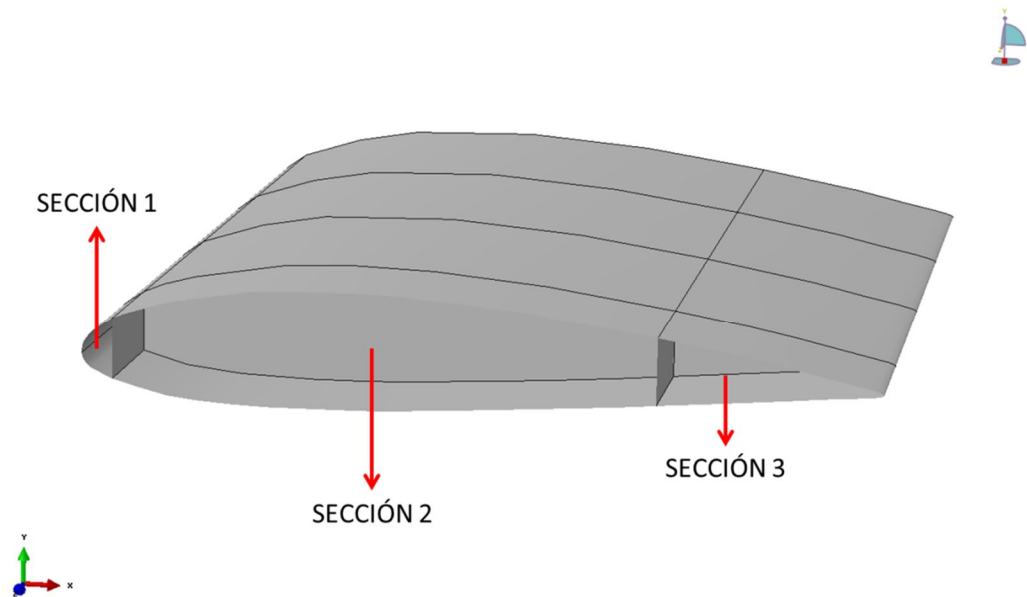


Figura 5.3. Vista de la sección transversal del modelo 5.

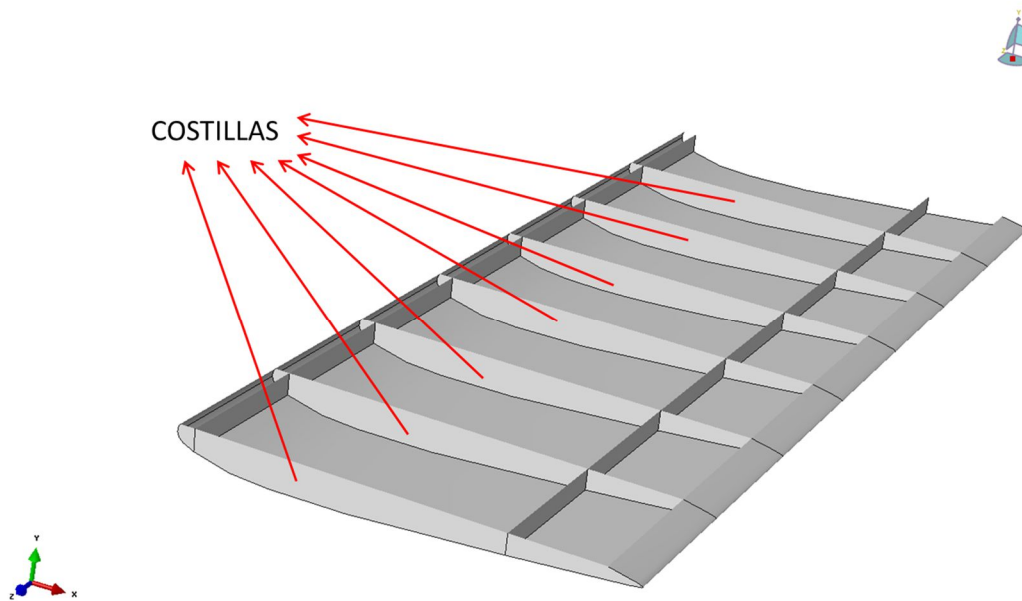


Figura 5.4. Vista de la sección horizontal del modelo 5.

Los espesores que han sido utilizados en las diferentes partes han sido tomados buscando el mínimo espesor posible, sin llegar a comprometer los criterios de flecha máxima y límite elástico del aluminio. En la figura 5.5 se puede ver la distribución de los espesores en las diferentes partes del ala. La cara inferior presenta la misma distribución de espesores que la cara superior.

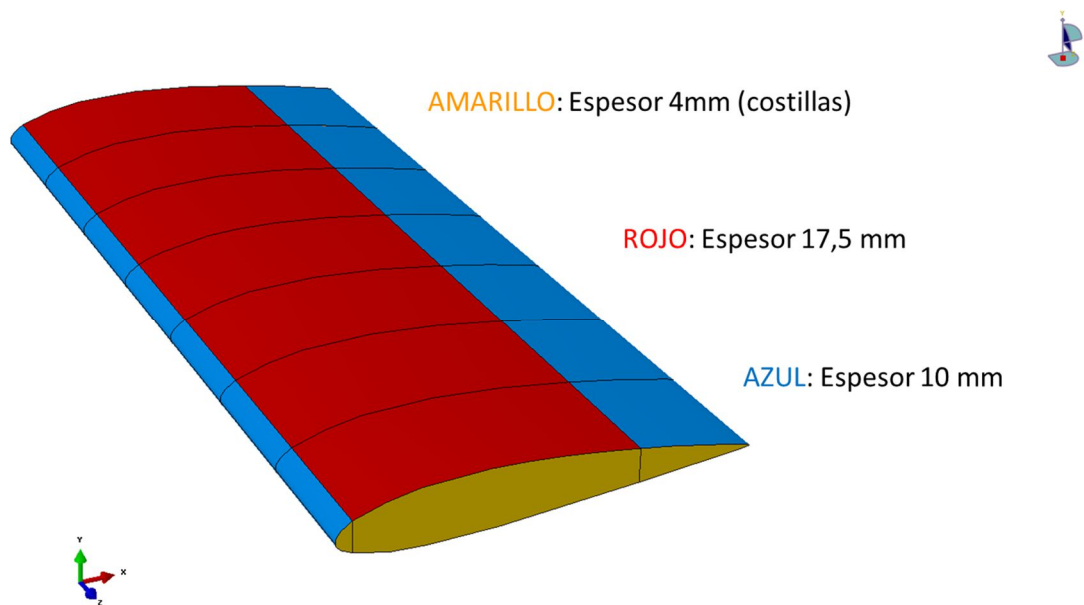


Figura 5.5. Distribución de espesores en el modelo 5.

### Modelo 6

Este último modelo corresponde al ala con la forma y dimensiones reales del Airbus A320. El perfil que se usó es el comentado anteriormente, un perfil NACA 2415.

Como se ve en la figura 5.6, la sección ya no es ni recta ni constante, por lo que la sección transversal al ser un perfil NACA hace que la altura de la sección varíe en función de la cuerda del perfil NACA.

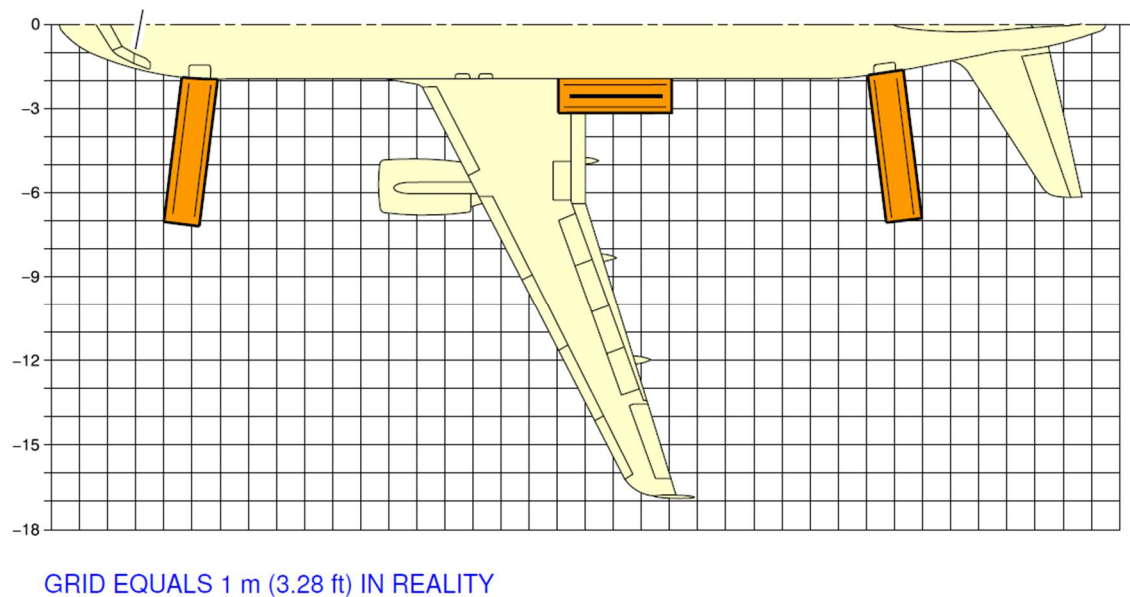


Figura 5.6. Vista en planta del ala del Airbus A320.



Las dimensiones globales en planta se muestran en la figura 5.7, las cuales se obtuvieron de la figura 5.6.

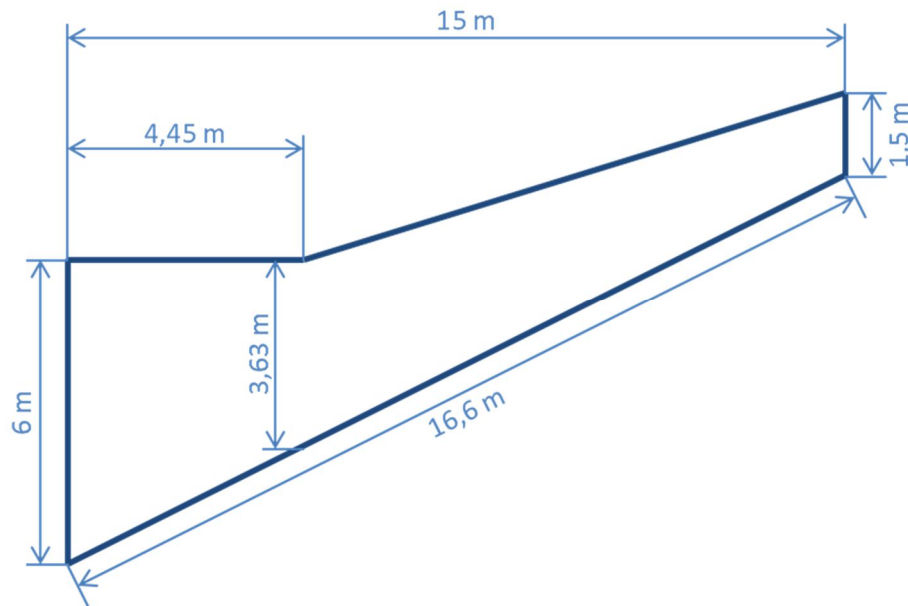


Figura 5.7. Vista acotada en planta del ala del Airbus A320.

La altura del perfil NACA va variando en función de la cuerda. En el encastre al fuselaje la altura máxima es de 0,9 m, en la punta del ala es de 0,225 m y a 4,45 m del encastre, donde cambia la sección, la altura máxima es de 0,5445 m.

Al igual que el modelo 5, la sección transversal está dividida en 3 secciones y a lo largo del ala se tienen situadas 7 costillas. La diferencia con los modelos anteriores radica que al no ser recta y constante la sección las dimensiones no se mantienen.

En la figura 5.8 se observa la distribución de las secciones y costillas.

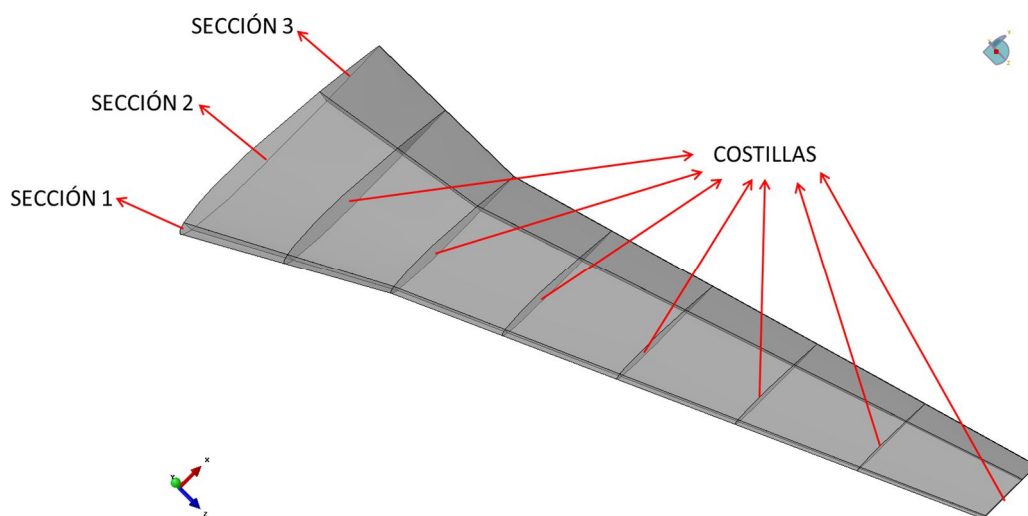


Figura 5.8. Vista transparente del modelo 6.

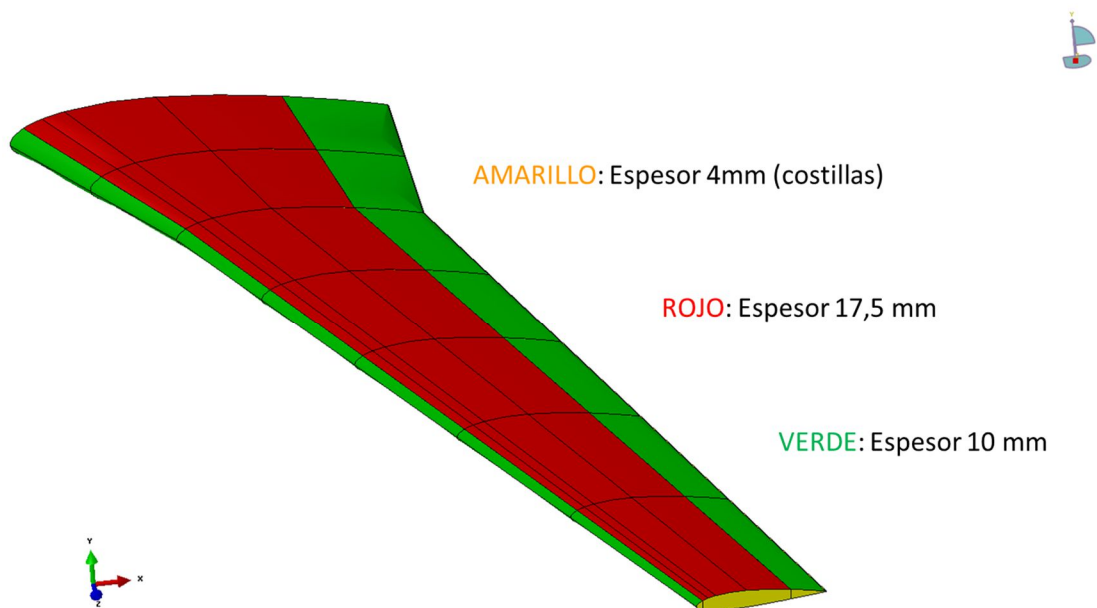
La sección 1 corresponde al 3,8% de la cuerda, la sección 2 al 68,25% y la sección 3 al 27,95%.

Las costillas no están situadas de forma totalmente equidistantes como en los modelos anteriores. Se tiene una en el cambio de sección (4,45 m del encastre), otra en la mitad de esta sección y las restantes situadas de forma equidistante en la segunda mitad del ala (de los 4,45 m del encastre a la punta del ala).

En el modelo 6 se tienen dos distribuciones de espesores, una se corresponde con el modelo 6A y la otra con el modelo 6B. Ambas configuraciones se detallan a continuación.

#### Modelo 6A

La configuración que presenta este modelo es prácticamente idéntica al del modelo 5, únicamente se cambió el espesor de 10 mm por uno de 12 mm. En la figura 5.9 se puede ver la distribución de espesores completa.



*Figura 5.9. Distribución de espesores en el modelo 6A.*

### MODELO 6B

Para este modelo se utilizó una configuración de espesores que fueran disminuyendo según se alejan del encastre. Para ello se dividió en tres partes el ala, siendo la primera la correspondiente a las dos primeras costillas, la segunda a las dos costillas siguientes y la tercera a las tres costillas últimas. En la figura 5.10 se muestra la distribución de espesores sobre el ala. El ala es simétrica por lo que los espesores en la cara inferior son los mismos que los de la cara superior.

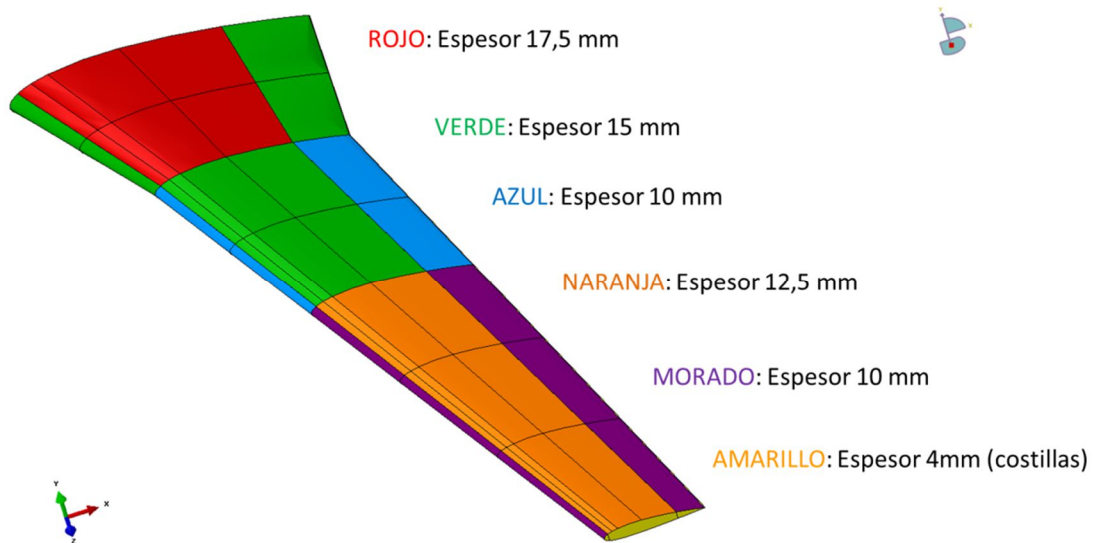


Figura 5.10. Distribución de espesores en el modelo 6B.

## **5.2.-DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES**

En los 4 modelos anteriores la distribución de la presión sobre el perfil alar se realizó de una forma sencilla aplicando una carga triangular. Con esto se pretendía tener una distribución de presiones que no fuera uniforme sobre toda la superficie alar y así que esta produjese también un momento torsor, hecho que en la realidad se produce en el ala de un avión.

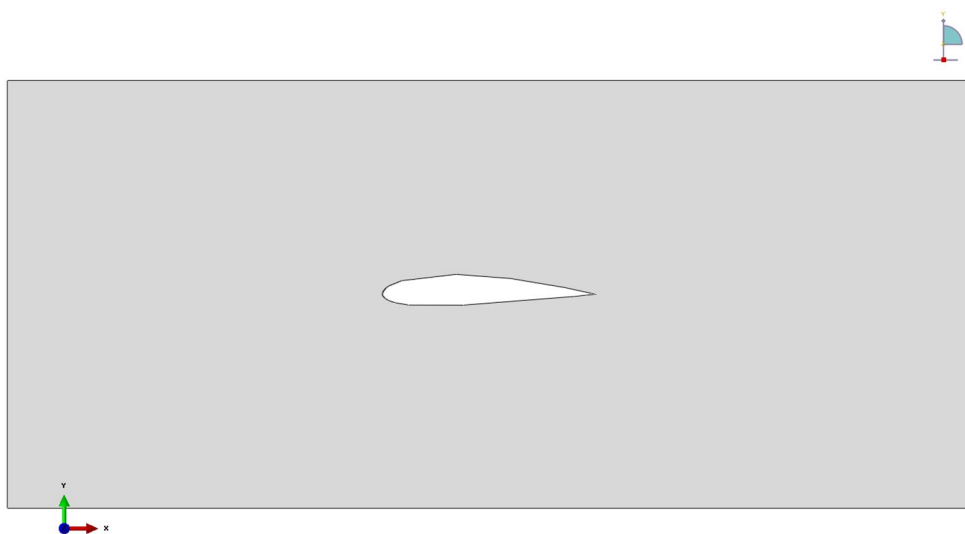
Como se puede intuir, una distribución triangular de la presión no coincide con la verdadera distribución de presiones que se generan en un ala cuando un avión se encuentra en vuelo. Para poder modelizar de una forma más realista y exacta la verdadera distribución de presiones que existe en el ala se creó un modelo sencillo de CFD (computational fluid dynamics) del perfil NACA 2415.

### **5.2.1.- MODELO CFD DEL PERFIL NACA 2415**

El software Abaqus que se utilizó para el cálculo estructural también implementa un módulo sencillo de CFD, el cual se usó para el análisis de la distribución de presiones.

El objetivo era obtener una distribución de presiones que se aproximara a la realidad, para ello se creó un modelo en 2D del perfil NACA 2415. La longitud de cuerda del perfil que se utilizó es de 4m. Esta es una medida intermedia aproximada entre la cuerda que tiene el perfil en el encastre (6 m) y la cuerda en la punta del ala (1,5 m).

Este perfil estaba situado en el centro de un volumen de control con unas dimensiones rectangulares de 18 m x 8 m (figura 5.11). Con esto se aseguró que el perfil se encontraba lo suficientemente alejado de las fronteras del volumen control para que estos no interaccionaran e influyeran en los resultados.



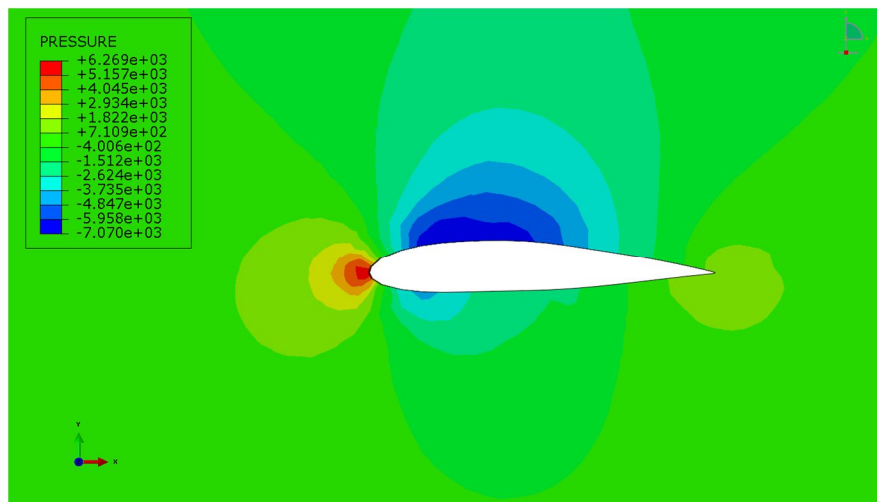
*Figura 5.11. Modelo CFD del perfil NACA 2415.*

Las condiciones de contorno y propiedades del aire que se aplicaron son las correspondientes a las que se encontraría el avión en vuelo normal, es decir, velocidad y altitud de crucero. Estas corresponden a una velocidad de 824 Km/h y 11000 m de altitud. Según la ISA (International Standard Atmosphere) el aire a 11000 m de altitud tiene una densidad de  $0,364 \text{ Kg/m}^3$ , una viscosidad dinámica de  $1,377 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  y cinemática de  $3,775 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

El avión cuando vuela en línea recta el ángulo de ataque que posee no es  $0^\circ$ , sino que es algo mayor. Un valor aproximado y típico de ángulo de ataque para estas condiciones es de unos  $4^\circ$ . Los datos de presiones obtenidos para este ángulo de ataque son los que se tomaron para realizar la distribución de presiones. Aun así se realizó un análisis a  $0^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$  y  $20^\circ$  para observar cómo se comportaba el aire sobre el ala en las diferentes situaciones que esta se puede encontrar.

#### Ángulo de ataque $0^\circ$

Con un ángulo de ataque de  $0^\circ$  se puede ver en la figura 5.12 que en el extradós se tiene una fuerza de succión ligeramente desplazada hacia el borde de ataque. En el intradós se tiene también una fuerza de succión pero mucho menor y más cercana al borde de ataque. En el borde de ataque se tiene una alta concentración de presiones que dificulta el desplazamiento del perfil.



*Figura 5.12. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de  $0^\circ$ .*

#### Ángulo de ataque $4^\circ$

Esta configuración de ángulo de ataque proporciona una fuerza de succión mayor en el extradós que en el caso anterior pero están más desplazadas hacia el borde de ataque lo que provoca un incremento del momento torsor. El intradós tiene una fuerza de succión pero esta

es menor que en el caso anterior. A su vez la concentración de presiones están ligeramente desplazadas hacia el intradós, lo que contribuye a la sustentación.

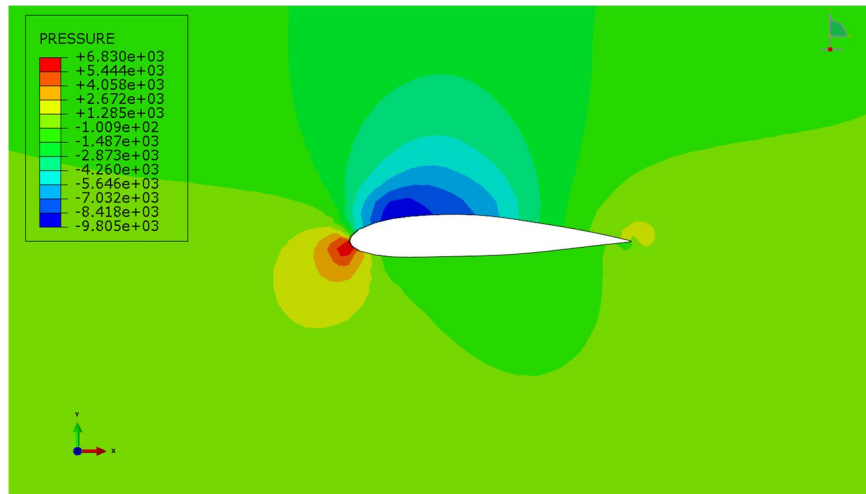


Figura 5.13. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de 4º.

#### Ángulo de ataque 10º

Con un ángulo de ataque significativo (10º) se puede ver en la figura 5.14 que se sigue teniendo una fuerza de succión en el extradós y de mayor valor que en los casos previos. Por el contrario el intradós presenta una fuerza de empuje que contribuye a la sustentación.

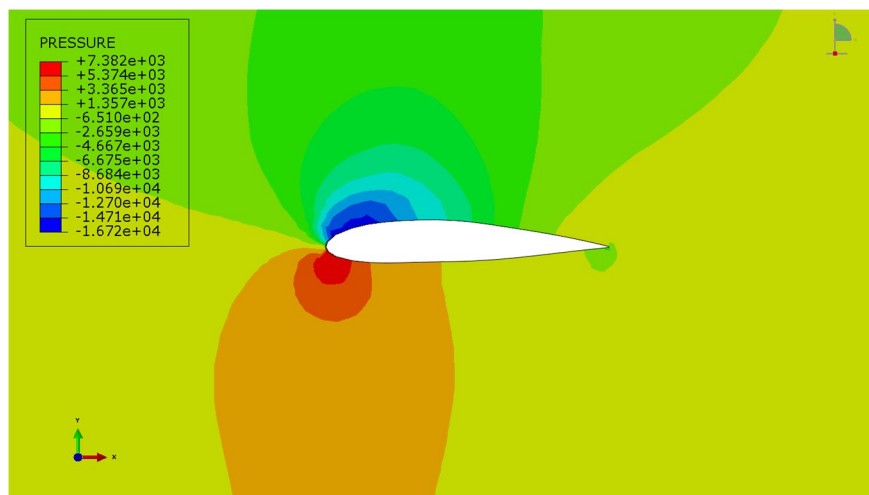
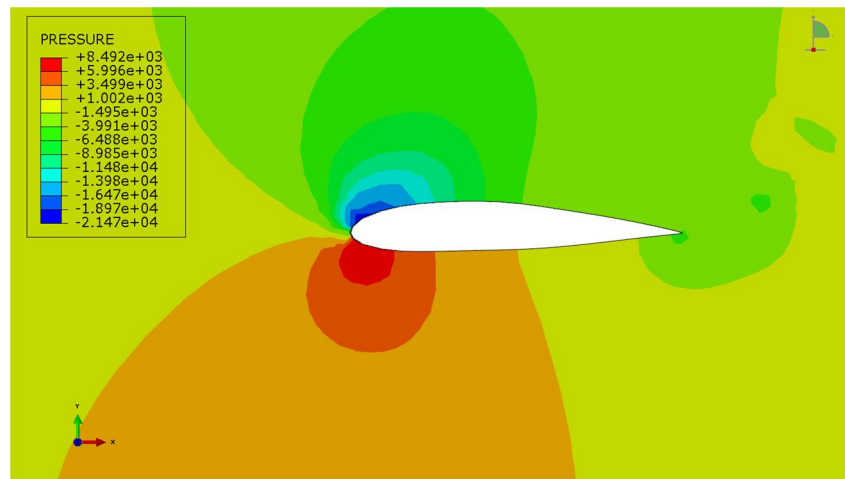


Figura 5.14. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de 10º.

### Ángulo de ataque 15º

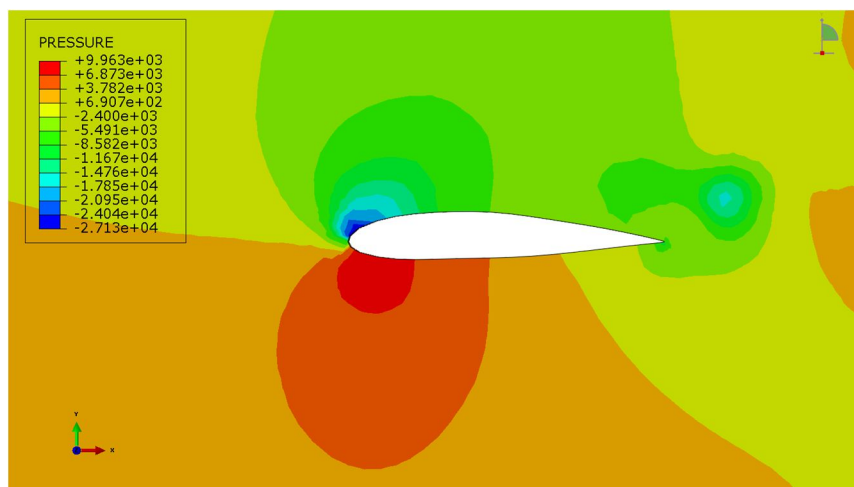
En la figura 5.15 se puede ver que un ángulo de ataque de 15º presenta una distribución similar a la de 10º pero con las presiones máximas desplazadas mas cerca del borde de ataque. También se puede ver que en el borde de salida se empiezan a crear turbulencias.



*Figura 5.15. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de 15º.*

### Ángulo de ataque 20º

Como se puede ver en la figura 5.15 los fenómenos que se producen con un ángulo de ataque de 20º son los mismo que para los de 15º pero mucho más acentuados como es el caso de la aparición de turbulencias más significativas y un mayor desplazamiento de las presiones máximas hacia el borde de ataque.



*Figura 5.15. Distribución de presiones perfil NACA 2415 con ángulo de ataque de 20º.*

Después de haber realizado los diferentes modelos de CFD se pudo concluir porque el ángulo de ataque en vuelo recto es aproximadamente  $4^\circ$  y porque en maniobras como el aterrizaje pero sobre todo en el despegue o ascensiones los ángulos de ataque son cercanos a  $20^\circ$ .

Esto se debe a que en vuelo recto se necesita una fuerza de sustentación moderada con una minimización de las fuerzas de arrastre y resistencia al aire. En el caso de despegues o ascensiones prima la necesidad de tener una fuerza de sustentación mucho mayor, en detrimento de las fuerzas de arrastre y resistencia, para permitir al avión ganar altura. En el caso de los aterrizajes también se tienen ángulos de ataque elevados porque estos son capaces de generar mayores fuerzas de sustentación a bajas velocidades además de generar una mayor resistencia, permitiendo al avión perder velocidad y altitud de una forma controlada.

### **5.2.2.- CARACTERIZACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES**

El modelo de CFD que se utilizó para caracterizar la distribución de presiones es el correspondiente al de un ángulo de ataque de  $4^\circ$ . Este es el ángulo de ataque que posee el ala en vuelo recto y en condiciones de crucero.

Para comenzar se obtuvo una gráfica adimensionalizada de las presiones a lo largo de la cuerda para el extradós (cara superior) y el intradós (cara inferior), en la que el eje X representa la longitud de la cuerda sobre 1 y el eje Y representa la presión en cada punto sobre 1 también. Los valores positivos de presión indican una fuerza hacia arriba y valores negativos de presión indican una fuerza hacia abajo. Esto se traduce en que una presión positiva en el extradós está tirando del perfil hacia arriba y una presión negativa empuja el perfil hacia abajo, mientras que una presión positiva en el intradós empuja el perfil hacia arriba y una negativa tira del perfil hacia abajo.

En resumen, se puede decir que toda presión positiva contribuye a la fuerza de sustentación mientras que toda presión negativa se opone a la fuerza de sustentación.

En primer lugar se obtuvo la distribución de presiones para el Modelo 5, el cual es un perfil NACA 2415 de sección constante. Posteriormente, basándose en los resultados obtenidos, se pasó a calcular la distribución de presiones para el MODELO 6, que sigue siendo un perfil NACA 2415 pero con variaciones en la sección y forma ya que es el modelo con las medidas y formas reales del ala del Airbus A320.



### Modelo 5

Como se ha mencionado previamente, se comenzó obteniendo la distribución de presiones adimensionalizada para el extradós (figura 5.16) y el intradós (figura 5.17).

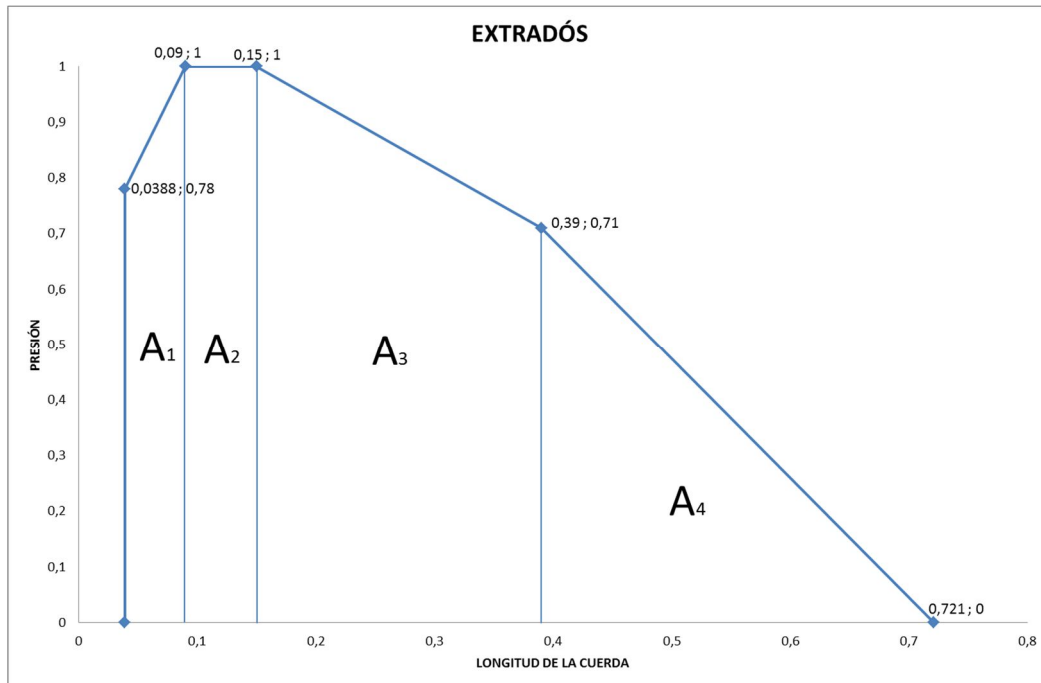


Figura 5.16. Distribución de presiones adimensionalizada en el extradós.

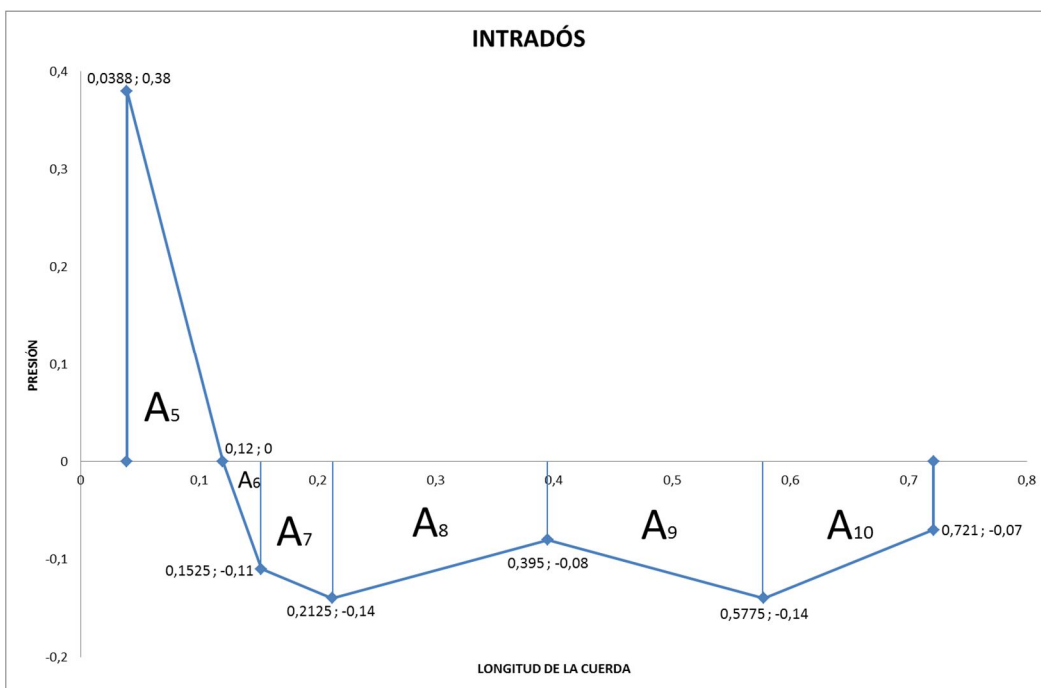


Figura 5.17. Distribución de presiones adimensionalizada en el intradós.

Una vez se tenía la distribución de presiones se obtuvo el área bajo la curva para el extradós (5.1) y el intradós (5.2).

$$A_{EXTRADÓS} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0,0455 + 0,06 + 0,2052 + 0,1175 = 0,4282 \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} A_{INTRADÓS} &= A_5 - A_6 - A_7 - A_8 - A_9 - A_{10} \\ &= 0,0154 - 1,78 \cdot 10^{-3} - 7,5 \cdot 10^{-3} - 0,02 - 0,02 - 0,015 \\ &= 0,0154 - 0,0642 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Con las áreas del extradós e intradós calculadas se pasó a obtener el área que era de sustentación (fuerza hacia arriba) (5.3) y de succión (fuerza hacia abajo) (5.4).

$$A_{SUSTENTACIÓN} = 0,4282 + 0,0154 = 0,4436 \text{ (87,35\%)} \quad (5.3)$$

$$A_{SUCCIÓN} = 0,0642 \text{ (12,65\%)} \quad (5.4)$$

Cuando se sabía que área contribuye a la sustentación y cuál a la succión se pasó a calcular los valores de dichas fuerzas (5.5 a 5.8). Se sabía que la resultante tiene que ser una fuerza positiva hacia arriba de 114656 N/m (sustentación).

$$F_{SUSTENTACIÓN} - F_{SUCCIÓN} = F \cdot 0,8735 - F \cdot 0,1265 = F \cdot 0,747 \quad (5.5)$$

$$F \cdot 0,747 = 114656 \rightarrow F = \mathbf{153488 \text{ N/m}} \quad (5.6)$$

$$F_{SUSTENTACIÓN} = F \cdot 0,8735 = 134072 \text{ N/m} \quad (5.7)$$

$$F_{SUCCIÓN} = F \cdot 0,1265 = 19416 \text{ N/m} \quad (5.8)$$

El siguiente paso era obtener el factor de escala ya que la gráfica esta adimensionalizada. Era necesario tener en cuenta la longitud real de la cuerda y la fuerza máxima que se ejerce. El factor de escala total es el producto del factor de escala geométrico y el factor de escala de fuerza (5.10). El factor de escala geométrico era conocido, ya que es la relación directa entre la cuerda del perfil alar (6,3) y el tomado en la gráfica (1). El factor de escala de fuerza se obtuvo despejando la ecuación 5.9 donde se tomó la fuerza en una sección, en ese caso la 1.

$$A_1 = 0,0455 \text{ (10,25\%)}$$

$$F_1 = 13751 \text{ N/m}$$

$$F_1 = L \cdot FEF \cdot A_1 = 6,3 \cdot FEF \cdot 0,0455 \rightarrow FEF = 47902 \quad (5.9)$$

$$Factor\ de\ escala = FEG \cdot FEF = 6,3 \cdot 47902 = 301782 \quad (5.10)$$

Con el factor de escala calculado se pudo obtener ya la fuerza que se aplica en cada sección del extradós y del intradós y saber que fuerza de sustentación (5.11) y succión (5.12) se tenía. La figura 5.18 muestra las secciones en las que está dividido el extradós (izquierda) y el intradós (derecha).

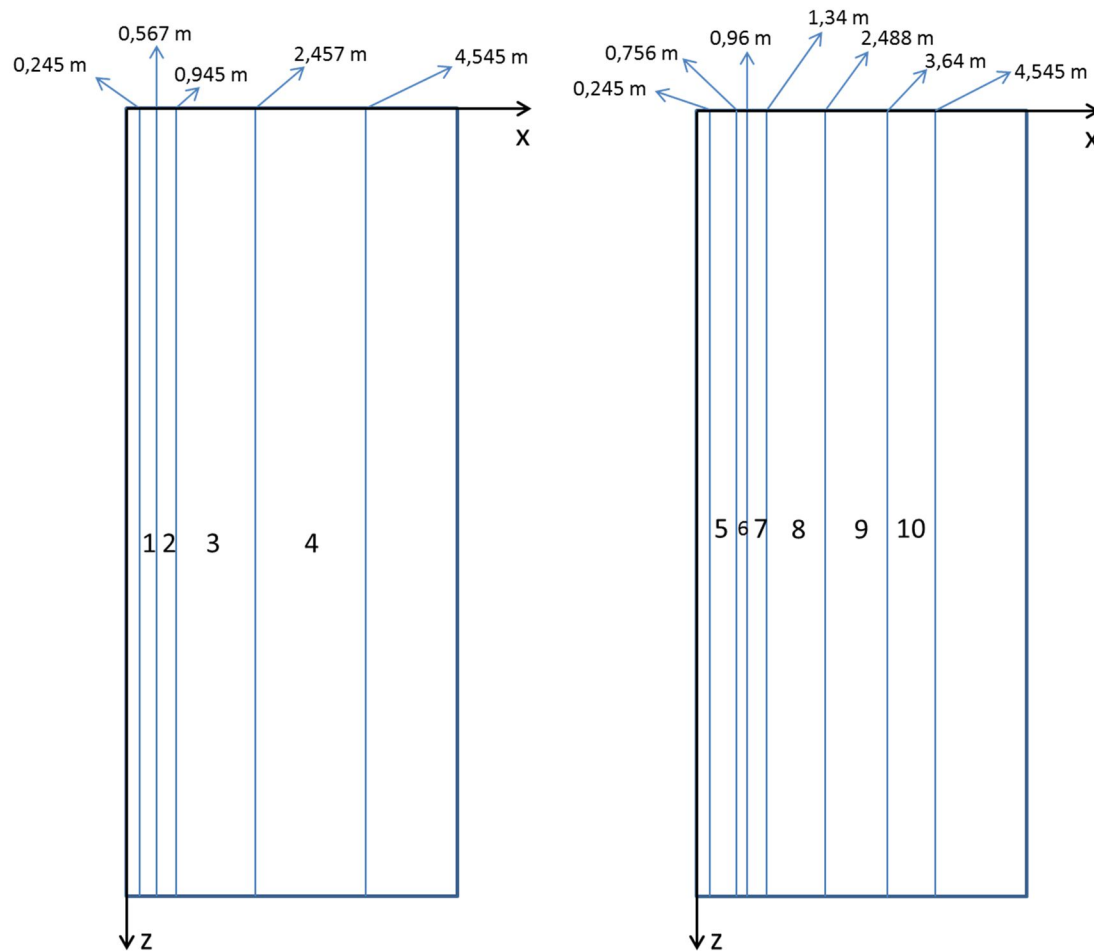


Figura 5.18. Secciones del extradós (izquierda) e intradós (derecha).

$$F_{SUSTENTACIÓN} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 13751 + 18106 + 61925 + 35460 + 4655$$

$$= 133897 \text{ N/m}$$

$$(5.11)$$

$$F_{SUCCION} = A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} = 539 + 2263 + 6058 + 6058 + 4547 \\ = 19465 \text{ N/m}$$

(5.12)

Con todos estos datos se tenía todo lo necesario para conocer las presiones que había que aplicar sobre el ala. Esta presión ya había sido calculada ya que corresponde con el factor de escala de la fuerza, es decir, 47902. Por lo que la presión que se tenía que aplicar en el modelo a la hora de definir las cargas era de 47902 Pa.

Como se puede ver en las gráficas esta presión no es uniforme a lo largo del ala, sino que varía de forma lineal o es constante según en la sección que se este. Para reproducir estas variaciones era tan sencillo como aplicar una fórmula en cada sección que variara la presión aplicada según fuera el caso a lo largo de la coordenada X. Esto se consiguió aplicando una ecuación de la recta (5.13). Hay que tener en cuenta que la ordenada en el origen sería el porcentaje de la presión total aplicada al comienzo de la sección y la pendiente sería la variación de esta a lo largo de la sección.

$$y = m \cdot (x - x_0) + b \quad (5.13)$$

A continuación se exponen las ecuaciones correspondientes para las 4 secciones del intradós (5.14) y las 6 secciones del extradós (5.15).

#### Extradós:

- Sección 1 (0,245m – 0,567m): *Fórmula* =  $0,683 \cdot (x - 0,245) + 0,78$

$$Pendiente = \frac{1-0,78}{0,567-0,245} = 0,683$$

- Sección 2 (0,567m – 0,945m): *Fórmula* = 1

- Sección 3 (0,945 – 2,457m): *Fórmula* =  $-0,191 \cdot (x - 0,945) + 1$

$$Pendiente = \frac{0,71-1}{2,457-0,945} = -0,191$$

- Sección 4 (2,457m – 4,545m): *Fórmula* =  $-0,34 \cdot (x - 2,457) + 0,71$

$$Pendiente = \frac{0-0,71}{4,545-2,457} = -0,34$$

(5.14)

Intradós:

- Sección 5 (0,245m – 0,756m): *Fórmula* =  $-0,743 \cdot (x - 0,245) + 0,38$

$$Pendiente = \frac{0-0,38}{0,756-0,245} = -0,743$$

- Sección 5 (0,756m – 0,96m): *Fórmula* =  $0,54 \cdot (x - 0,756)$

$$Pendiente = \frac{0,11-0}{0,96-0,756} = 0,54$$

- Sección 7 (0,96m – 1,34m): *Fórmula* =  $0,079 \cdot (x - 0,96) + 0,11$

$$Pendiente = \frac{0,14-0,11}{1,34-0,96} = 0,079$$

- Sección 8 (2,488m – 1,34m): *Fórmula* =  $-0,052 \cdot (x - 1,34) + 0,14$

$$Pendiente = \frac{0,08-0,14}{2,488-1,34} = -0,052$$

- Sección 9 (3,64m – 2,488m): *Fórmula* =  $0,052 \cdot (x - 2,488) + 0,08$

$$Pendiente = \frac{0,14-0,08}{3,64-2,488} = 0,052$$

- Sección 10 (4,545m – 3,64m): *Fórmula* =  $-0,077 \cdot (x - 3,64) + 0,14$

$$Pendiente = \frac{0,07-0,014}{4,545-3,64} = -0,077$$

(5.15)

**Modelo 6**

El modelo 6 se corresponde al ala del Airbus A320 con sus dimensiones reales, por lo que la forma en planta de esta deja de ser un rectángulo y pasa a tener una forma trapezoidal. Debido a esta forma más compleja se dividió el ala en dos secciones trapezoidales, las cuales permitirían realizar los cálculos correspondientes de una forma más sencilla. La primera sección va desde el encastre hasta los 4,45 m, punto en el que se produce el cambio de forma, y la segunda sección va desde los 4,45 m hasta la punta del ala.

Para el cálculo de la distribución de presiones se siguió un método similar al seguido en el modelo 5. Se utilizaron las curvas adimensionalizadas (figuras 5.16 y 5.17) que ya se habían obtenido, pero teniendo en cuenta las variaciones de forma. Esto haría que las fórmulas que se aplicarían posteriormente fueran más complejas, debido a que en el modelo 5 solo tenía variación en la coordenada X, y en el modelo 6 debido al cambio de forma que experimenta el ala se tenía también una variación en la coordenada Z.

En primer lugar se pasó a calcular que fuerza de sustentación se tenía en cada sección. Posteriormente se calcularon los factores de escala, que nos permitirían saber la presión que había que aplicar en cada sección.

#### Cálculo de fuerza de sustentación y factores de escala

Se sabe que el ala debe generar una fuerza de sustentación resultante de 1719900 N, correspondiente a los 39000 Kg del peso del avión aplicándole un factor de carga de 4,5 como se vio en el apartado 3.2 (Carga aplicada).

Para saber que fuerza de sustentación resultante había en cada sección, se obtuvo la presión media en el ala (5.19) y luego en función del área de cada sección se calculó la fuerza correspondiente (5.20 y 5.21).

$$A_{Ala} = A_1 + A_2 = 21,428 \text{ m}^2 + 31,165 \text{ m}^2 = 52,593 \text{ m}^2 \quad (5.16)$$

$$A_1 = \frac{(B + b)}{2} \cdot h = \frac{(6 + 3,63)}{2} \cdot 4,45 = 21,428 \text{ m}^2 \quad (5.17)$$

$$A_2 = \frac{(B + b)}{2} \cdot h = \frac{(3,63 + 1,5)}{2} \cdot 12,15 = 31,165 \text{ m}^2 \quad (5.18)$$

$$P_{media} = \frac{F_{Total}}{A_{Ala}} = \frac{1719900}{52,593} = 32702 \text{ Pa} \quad (5.19)$$

$$F_{sus \text{ resultante } 1} = P_{media} \cdot A_1 = 700738 \text{ N} \rightarrow 157469 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (5.20)$$

$$F_{sus \text{ resultante } 2} = P_{media} \cdot A_2 = 1019157 \text{ N} \rightarrow 83881 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (5.21)$$

Según las ecuaciones 5.22 obtenidas ya en el modelo 5 se calcularon las fuerzas de sustentación y succión en cada sección (5.23 y 5.24):

$$F_{sus \text{ resultante}} = F_{sus \text{ total}} - F_{suc \text{ total}} = F \cdot 0,8735 - F \cdot 0,1265 = F \cdot 0,747$$

$$F_{sección} = \frac{F_{sus \text{ resultante}}}{0,747}$$

$$(5.22)$$

$$F_{seccion1} = 210801 \text{ N/m}$$

$$F_{seccion2} = 112290 \text{ N/m}$$

$$F_{SUSTENTACIÓN 1} = 184134 \text{ N/m}$$

$$F_{SUSTENTACIÓN 2} = 98085 \text{ N/m}$$

$$F_{SUCCIÓN 1} = 26666 \text{ N/m}$$

$$F_{SUCCIÓN 2} = 14204 \text{ N/m}$$

(5.23)

(5.24)

Para obtener los factores de escala de geometría y fuerza se siguió el mismo método que en el modelo 5, con la diferencia que el factor de escala de geometría no era directo al no tener una sección constante.

Para obtener el factor de escala de geometría se obtuvo la línea media en cada sección que divide el área total en dos áreas iguales y se tomó esta longitud como el factor de escala.

### Sección 1

Se creó un sistema de ecuaciones (5.25) para obtener  $x$  (5.26) (longitud media) a partir de las áreas de los trapecios generados:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = A_{1.1} + A_{1.2} \\ A_{1.1} = A_{1.2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{(B+b)}{2} \cdot 4,45 = \frac{(B+x)}{2} \cdot h + \frac{(x+b)}{2} \cdot (4,45 - h) \\ \frac{(B+x)}{2} \cdot h = \frac{(x+b)}{2} \cdot (4,45 - h) \end{array} \quad (5.25)$$

$$x = \sqrt{\frac{(B^2 + b^2)}{2}} = 4,959 \text{ m} \quad (5.26)$$

$$h = \frac{4,45 \cdot x + 4,45 \cdot b}{B + 2 \cdot x + b} = 1,955 \text{ m} \quad (5.27)$$

Con el factor de escala de geometría calculado se pasó a obtener el factor de escala de fuerza (5.28) y el total (5.29) como en el modelo 5:

$$A_1 = 0,0455 \text{ (10,25\%)}$$

$$F_1 = 18873 \text{ N/m}$$

$$F_1 = L \cdot FEF \cdot A_1 = 4,959 \cdot FEF \cdot 0,0455 \rightarrow FEF = 83522 \quad (5.28)$$

$$\text{Factor de escala} = FEG \cdot FEF = 4,959 \cdot 83522 = 414188 \quad (5.29)$$

## Sección 2

La longitud media, que sería el factor de escala de geometría, se obtuvo al igual que en la sección 1, siendo los resultados:

$$x = 2,777 \text{ m}$$

$$h = 4,864 \text{ m}$$

El factor de escala de fuerza (5.30) y el total (5.31) se calcularon al igual que en la sección 1:

$$A_1 = 0,0455 \text{ (10,25\%)}$$

$$F_1 = 10053 \text{ N/m}$$

$$F_1 = L \cdot FEF \cdot A_1 = 2,777 \cdot FEF \cdot 0,0455 \rightarrow FEF = 79449 \quad (5.30)$$

$$\text{Factor de escala} = FEG \cdot FEF = 2,777 \cdot 79449 = 220630 \quad (5.31)$$

Con todos estos cálculos se tenía la presión que se iba aplicar en cada sección del ala, siendo de **83522 Pa** para la sección 1 y de **79449 Pa** para la sección 2.

## Fórmulas de ajuste

Como ya se ha comentado, se necesitaba una fórmula que ajustara la presión que hay en cada punto de la superficie del ala. La distribución de presión y las secciones en las que se aplican las fuerzas son las mismas que en el modelo 5 (4 secciones en el extradós y 6 en el intradós), con la diferencia que la presión variaría tanto en la coordenada X y Z.

Para el modelo 5 se utilizó como base la ecuación de la recta (5.13): en la que b (ordenada en el origen) era el porcentaje de presión que se aplicaba al inicio de la sección en la que se estuviera, m (pendiente) era la pendiente con la que variaba la presión en dicha sección y (x-x<sub>0</sub>) era la longitud correspondiente en cada punto de la sección.

La fórmula que se ha utilizado para el modelo 6 (5.32) está basada en la ecuación 5.13 aplicando los ajustes necesarios que a continuación se detallan.

$$y = m \cdot [x - (x_x + z \cdot m_x)] + b \quad (5.32)$$

Se toma como guía la vista en planta del extradós de la sección 1 (figura x) para detallar a continuación cada término de la fórmula:



- m: Es la pendiente con la que varía la presión a lo largo de una sección, por lo que es el cociente entre la diferencia de porcentaje de presión aplicada y la longitud de la sección. Debido a que en este caso la longitud de la sección no es constante la pendiente queda definida de la siguiente forma:

$$m = \frac{P_{x_{(x+1)}} - P_{x_x}}{(x_{(x+1)} + z \cdot m_{(x+1)}) - (x_x + z \cdot m_x)} \quad (5.33)$$

- x: Coordenada x del punto en el que se quiere obtener la presión.
- $x_x$ : Coordenada x del punto inicial de la sección que se está calculando.
- z: Coordenada z del punto en el que se quiere obtener la presión.
- $m_x$ : Pendiente de la recta en el plano XZ que delimita cada sección en las que queda dividido el extradós o intradós.

Con esta fórmula se podían ya escribir las ecuaciones de la distribución de presión (DP) para todas las secciones del extradós (5.34) e intradós (5.35).

En la figura 5.19 se muestran las secciones del extradós con sus respectivas coordenadas en X y en la figura 5.20 se muestra la misma información pero relativa al intradós.

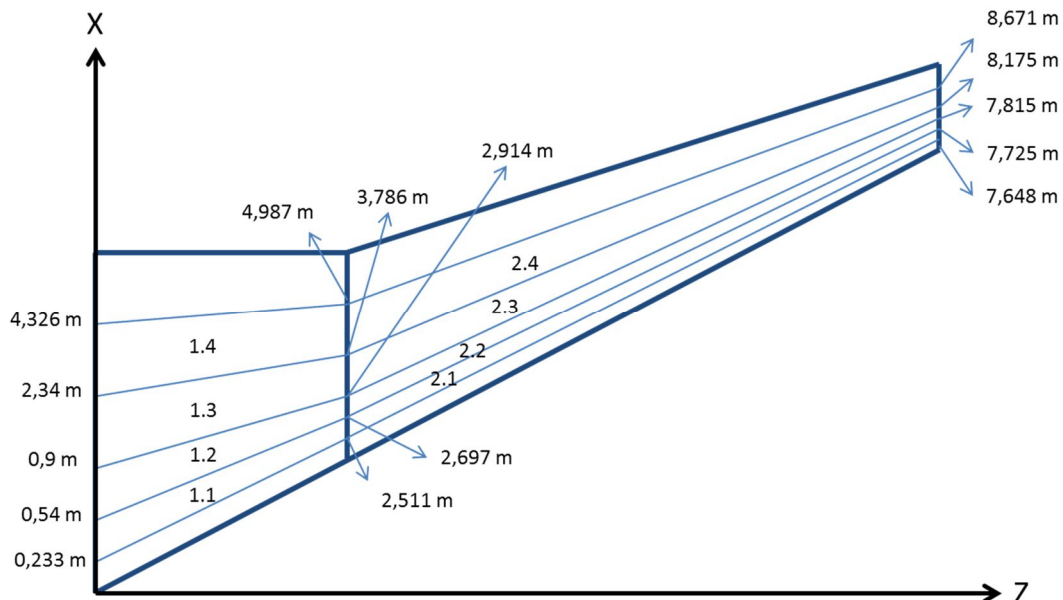


Figura 5.19. Secciones del extradós para el cálculo de la distribución de presiones.

Extradós:

- Sección 1.1:

$$DP = \frac{0,22}{(0,54 + z \cdot 0,485) - (0,233 + z \cdot 0,512)} \cdot [x - (0,233 + z \cdot 0,512)] + 0,78$$

- Sección 1.2:  $DP = 1$

- Sección 1.3:

$$DP = \frac{-0,29}{(2,34 + z \cdot 0,325) - (0,9 + z \cdot 0,453)} \cdot [x - (0,9 + z \cdot 0,453)] + 1$$

- Sección 1.4:

$$DP = \frac{-0,71}{(4,326 + z \cdot 0,148) - (2,34 + z \cdot 0,325)} \cdot [x - (2,34 + z \cdot 0,325)] + 0,71$$

- Sección 2.5:

$$DP = \frac{0,22}{(2,697 + (z + 4,45) \cdot 0,414) - (2,511 + (z + 4,45) \cdot 0,423)} \cdot [x - (0,233 + (z + 4,45) \cdot 0,512)] + 0,78$$

- Sección 2.6:  $DP = 1$

- Sección 2.7:

$$DP = \frac{-0,29}{(3,786 + (z + 4,45) \cdot 0,361) - (2,914 + (z + 4,45) \cdot 0,403)} \cdot [x - (2,914 + (z + 4,45) \cdot 0,403) + 1]$$

- Sección 2.8:

$$DP = \frac{-0,71}{(4,987 + (z + 4,45) \cdot 0,303) - (3,786 + (z + 4,45) \cdot 0,361)} \cdot [x - (3,786 + (z + 4,45) \cdot 0,361)] + 0,71$$

(5.34)

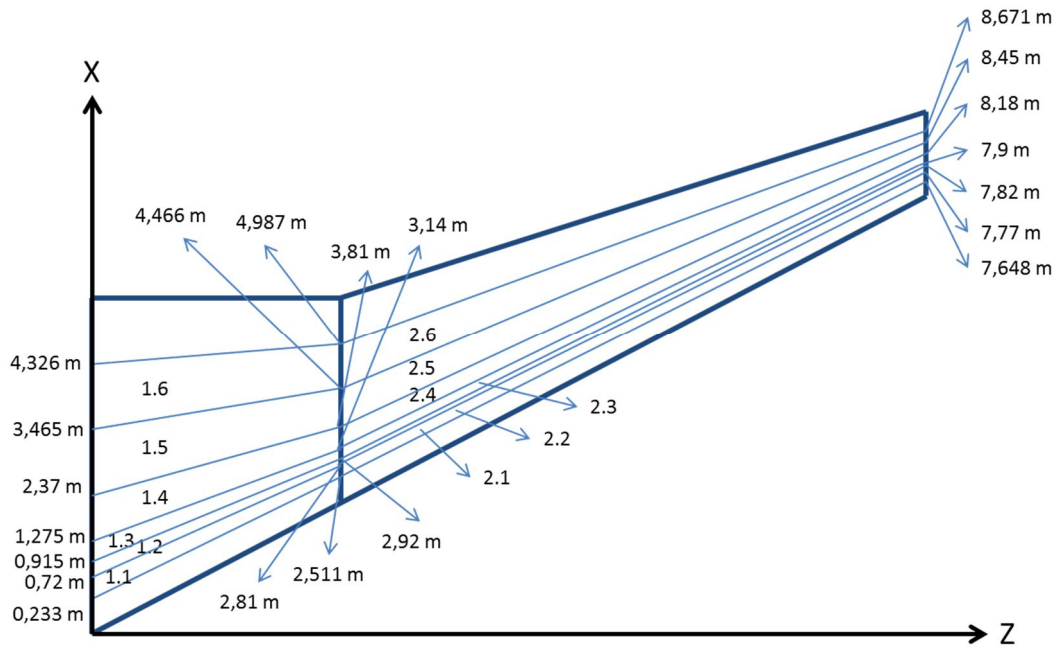


Figura 5.20. Secciones del intradós para el cálculo de la distribución de presiones.

#### Intradós:

- Sección 1.1:

$$DP = \frac{-0,38}{(0,72 + z \cdot 0,468) - (0,233 + z \cdot 0,512)} \cdot [x - (0,233 + z \cdot 0,512) + 0,38]$$

- Sección 1.2:

$$DP = \frac{0,11}{(0,915 + z \cdot 0,451) - (0,72 + z \cdot 0,468)} \cdot [x - (0,72 + z \cdot 0,468)]$$

- Sección 1.3:

$$DP = \frac{0,03}{(1,275 + z \cdot 0,419) - (0,915 + z \cdot 0,451)} \cdot [x - (0,915 + z \cdot 0,451)] + 0,11$$

- Sección 1.4:

$$DP = \frac{-0,06}{(2,37 + z \cdot 0,322) - (1,275 + z \cdot 0,419)} \cdot [x - (1,275 + z \cdot 0,419)] + 0,14$$

- Sección 1.5:

$$DP = \frac{0,06}{(3,465 + z \cdot 0,225) - (2,37 + z \cdot 0,322)} \cdot [x - (2,37 + z \cdot 0,322)] + 0,08$$

- Sección 1.6:

$$DP = \frac{-0,07}{(4,326 + z \cdot 0,148) - (3,465 + z \cdot 0,225)} \cdot [x - (3,465 + z \cdot 0,225)] + 0,14$$

- Sección 2.7:

$$DP = \frac{-0,38}{(2,806 + (z + 4,45) \cdot 0,408) - (2,511 + (z + 4,45) \cdot 0,423)} \cdot [x - (2,511 + (z + 4,45) \cdot 0,423)] + 0,38$$

- Sección 2.8:

$$DP = \frac{0,11}{(2,924 + (z + 4,45) \cdot 0,403) - (2,806 + (z + 4,45) \cdot 0,408)} \cdot [x - (2,806 + (z + 4,45) \cdot 0,408)]$$

- Sección 2.9:

$$DP = \frac{0,03}{(3,141 + (z + 4,45) \cdot 0,392) - (2,924 + (z + 4,45) \cdot 0,403)} \cdot [x - (2,924 + (z + 4,45) \cdot 0,403)] + 0,11$$

- Sección 2.10:

$$DP = \frac{-0,06}{(3,804 + (z + 4,45) \cdot 0,36) - (3,141 + (z + 4,45) \cdot 0,392)} \cdot [x - (3,141 + (z + 4,45) \cdot 0,392)] + 0,14$$

- Sección 2.11:

$$DP = \frac{0,06}{(4,466 + (z + 4,45) \cdot 0,328) - (3,804 + (z + 4,45) \cdot 0,36)} \cdot [x - (3,804 + (z + 4,45) \cdot 0,36)] + 0,08$$

- Sección 2.12:

$$DP = \frac{-0,07}{(4,987 + (z + 4,45) \cdot 0,303) - (4,466 + (z + 4,45) \cdot 0,328)} \cdot [x - (4,466 + (z + 4,45) \cdot 0,328)] + 0,14$$

(5.35)

## 5.3.-RESULTADOS

Una vez que se han detallado todos los datos relativos a la geometría (forma, dimensiones y espesores) y a las cargas (valor y distribución), se pasa a exponer los resultados obtenidos.

### 5.3.1.- MODELO 5

Como se expuso en el apartado 3.2 (Carga aplicada) el modelo 5A tiene una aplicación de la carga en forma triangular igual a los modelos 1, 2, 3 y 4 y el modelo 5B tiene una distribución de la carga siguiendo la forma expuesta en el apartado 5.2.2 (Caracterización de la distribución de presiones).

#### Modelo 5A

Se ha comenzado mostrando la flecha máxima que se alcanza en la punta del ala. En la figura 5.21 se puede ver una vista en perspectiva y perfil de la deformada con los valores que se alcanzan, siendo de 42 cm el máximo.

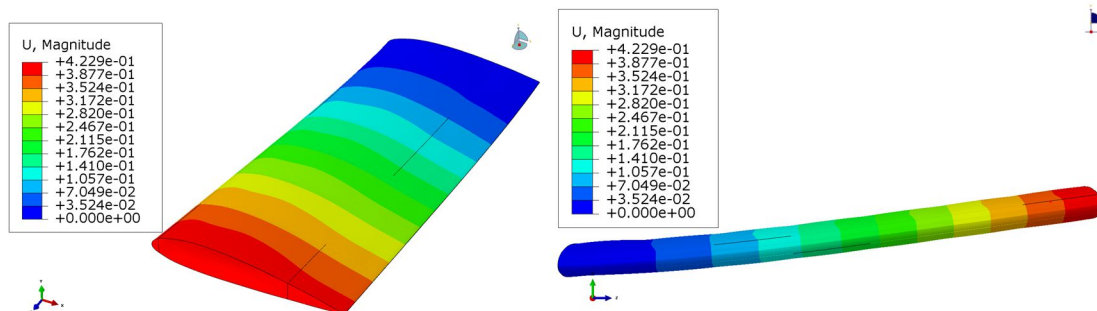


Figura 5.21. Deformada del modelo 5A.

A continuación, en la figura 5.22, se puede ver la distribución de tensiones de Von Mises. Como muestra la imagen no se superan los 375 MPa, alcanzándose este valor en la zona del encastre.

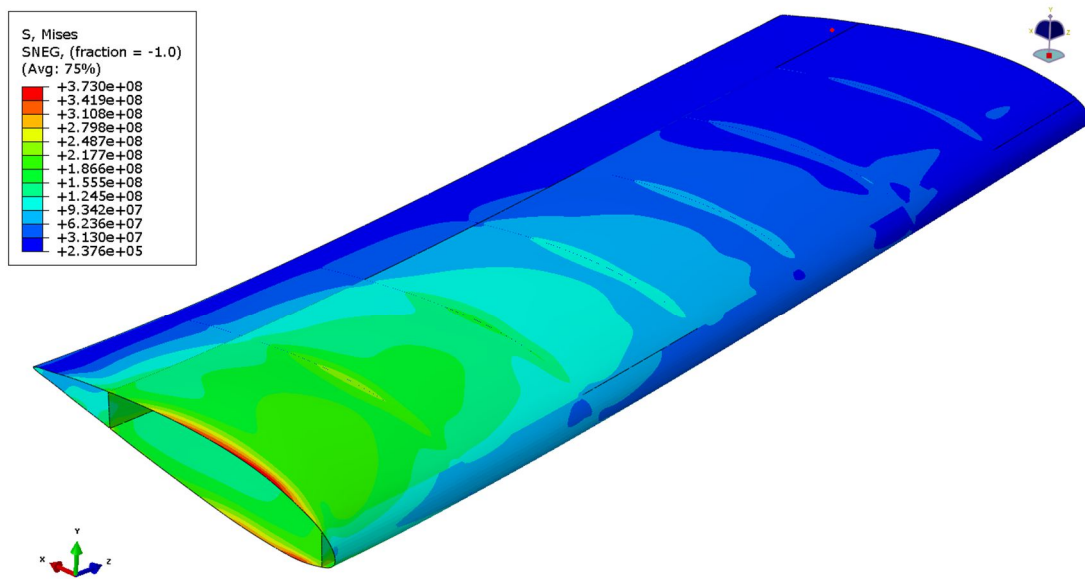


Figura 5.22. Distribución de tensiones de Von Mises en el modelo 5A.

Por ultimo en la figura 5.23 se muestra la distribución de las tensiones de cortadura en una vista de corte horizontal. Las máximas tensiones, aproximadamente de 90 MPa, se alcanzan en las secciones verticales próximas al encastre.

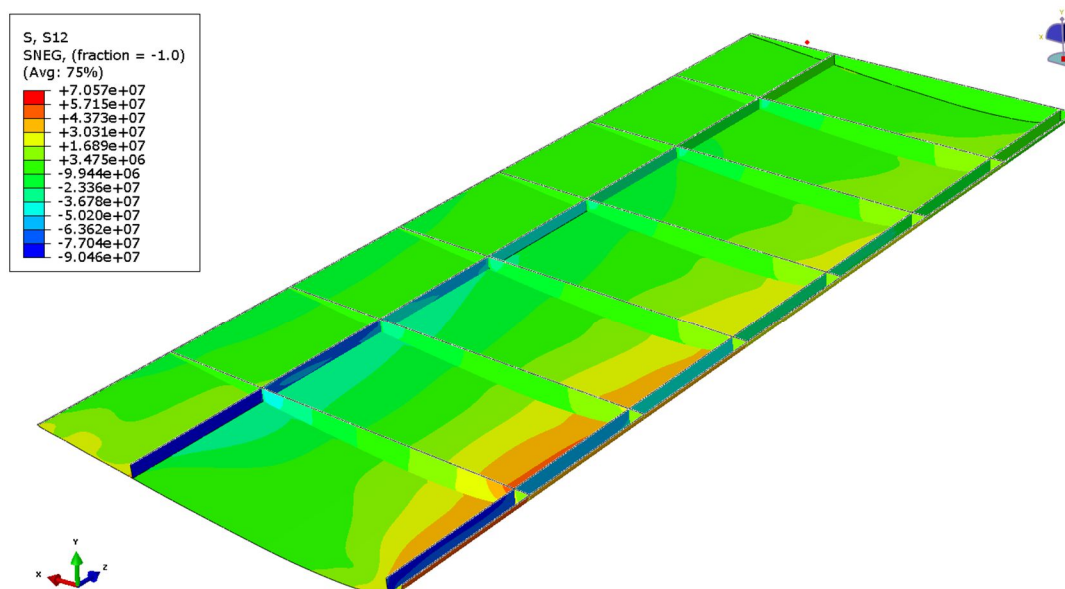


Figura 5.23. Corte horizontal del modelo 5A con la distribución de tensiones de cortadura.

Como se ha visto previamente el modelo 5A está dentro de los criterios de flecha máxima como de tensiones máximas. Los resultados que se obtienen se encuentran dentro de lo esperado ya que las tensiones máximas se sitúan en el encastre y las deformaciones máximas en la punta del ala.

### Modelo 5B

Al igual que en el caso anterior se ha comenzado mostrando los datos relativos a la flecha máxima. La figura 5.24 muestra una vista en perspectiva y en perfil de la deformada del modelo. En este caso la flecha máxima es de 1,024 m en la punta del ala.

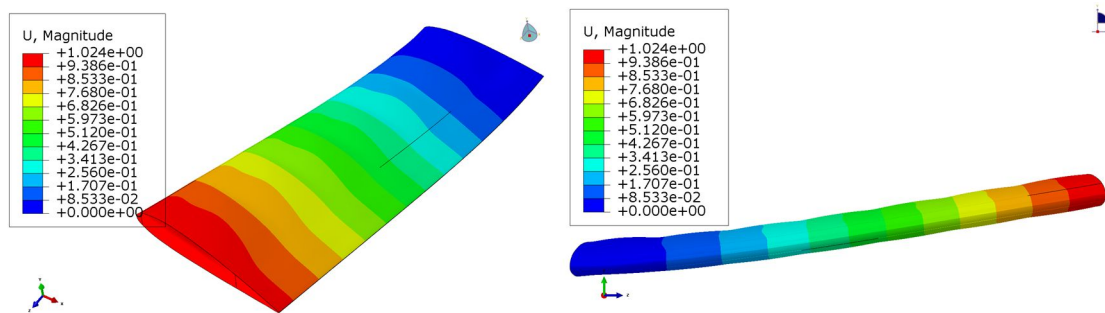


Figura 5.24. Deformada del modelo 5B.

Se continúa mostrando las tensiones de Von Mises en las figuras 5.25 y 5.26. En este caso se puede ver como unas pequeñas zonas alrededor del encastre superan los 490 MPa que es nuestro límite (5.25). Por otro lado la figura 5.26 sirve para ver que las costillas están soportando tensiones mucho más pequeñas que el resto del ala.

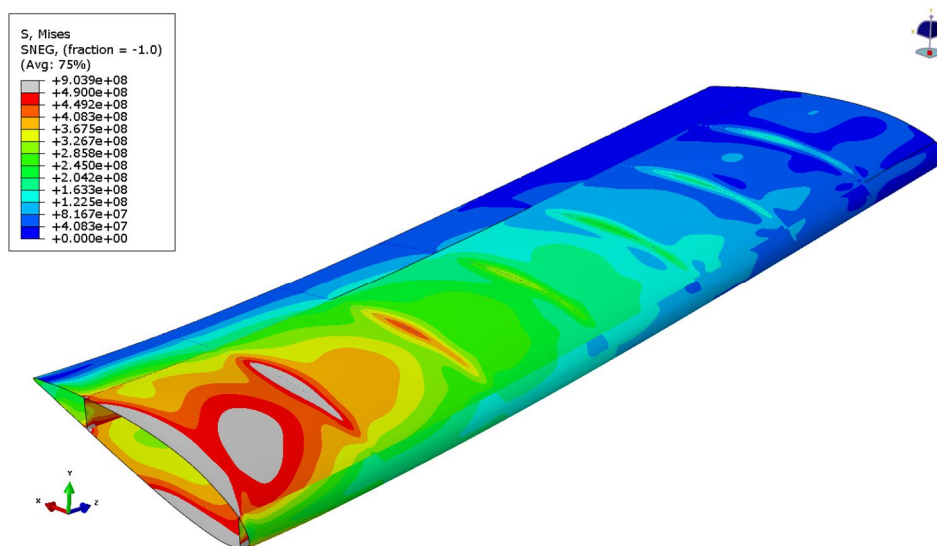


Figura 5.25. Distribución de tensiones de Von Mises en el modelo 5A.

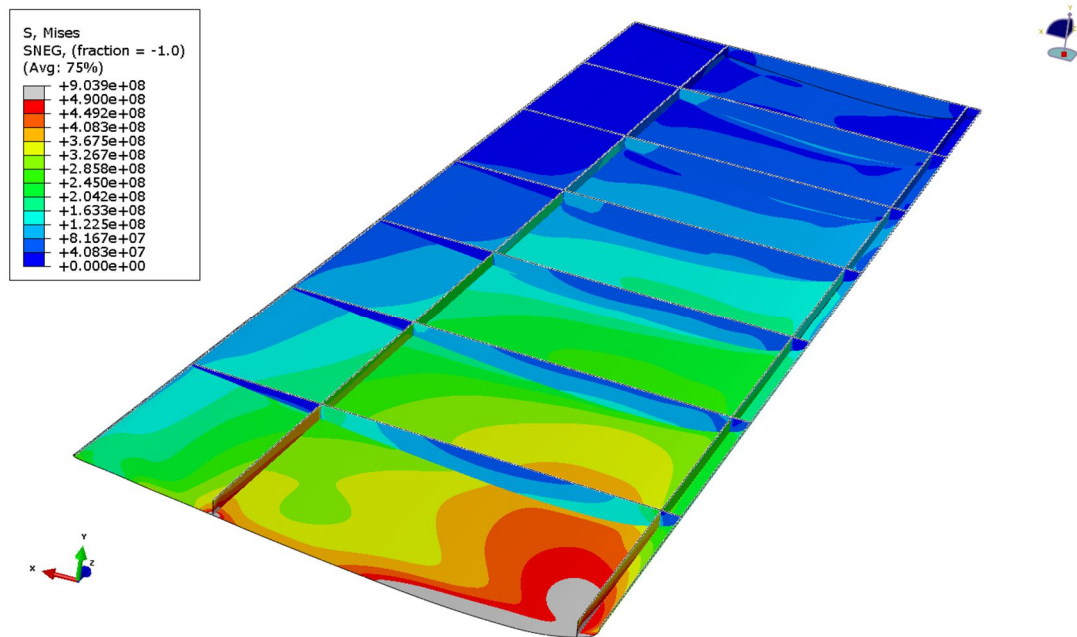


Figura 5.26. Corte horizontal del modelo 5B con la distribución de tensiones de Von Mises.

Para terminar con este modelo 5 queda por mostrar las tensiones de cortadura, estas se pueden ver en la figura 5.27. Las máximas que se alcanzan son cercanas a los 220 MPa y al igual que en el resto de ocasiones se producen en el encastre.

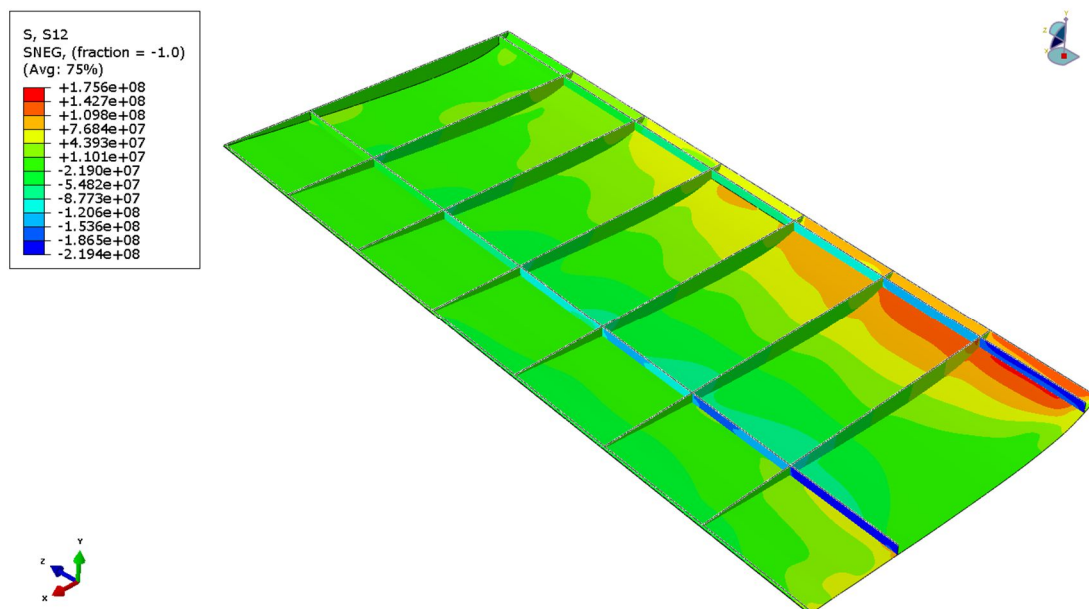


Figura 5.27. Corte horizontal del modelo 5B con la distribución de tensiones de cortadura.

El modelo 5B se ve que está mucho más cerca de los límites e incluso los supera en algún punto. Este es el caso de la tensión máxima admisible para el aluminio (490 MPa), la cual



es superada en pequeñas zonas del encastre. El resto de variables (flecha y tensión a cortadura) se encuentran dentro de los límites admisibles.

### **Discusión de resultados del modelo 5**

A pesar de que ambos modelos son geoméricamente idénticos y soportan la misma fuerza resultante, se ve que el segundo caso tiene unas solicitaciones internas mucho mayores (Tabla 5.1). Esto se debe a que el segundo modelo está soportando una fuerza de sustentación de 204944 Kg y una de succión de 29793 Kg, mientras que el primer modelo solo soporta una fuerza de sustentación de 175493 kg. Con esto se demuestra que el ala de un avión soporta cargas mucho mayores que las teóricas derivadas de un cálculo simple.

Otra conclusión lógica pero no menos importante es el hecho de que las mayores tensiones se alcanzan en el encastre en la zona más cercana al borde de ataque. Esto hace ver que la zona más crítica de un ala es esta y por tanto a la que mayor atención se tendrá que prestar a la hora de su diseño. Por ejemplo el modelo 5B necesitaría un refuerzo ya que esta en el límite de la tensión admisible.

|           | FLECHA (m) | TENSIÓN V. MISES (MPa) | TENSIÓN $\tau$ (MPa) | PESO (Kg) |
|-----------|------------|------------------------|----------------------|-----------|
| MODELO 5A | 0,42       | 375                    | 90                   | 8602      |
| MODELO 5B | 1,024      | 490                    | 220                  | 8602      |

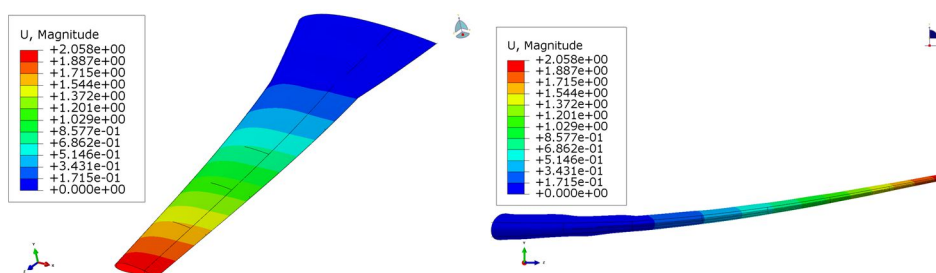
*Tabla 5.1. Datos del modelo 5.*

### **5.3.2.- MODELO 6**

Dentro del modelo 6 se tienen dos modelos, el 6A y 6B, los cuales presentan una distribución de presiones idénticas pero con diferente configuración de espesores.

#### **Modelo 6A**

En la figura 5.28 se muestra la deformada del modelo en una vista en perspectiva y otra de perfil, donde se puede ver que la flecha máxima alcanzada es de 2,058 m.



*Figura 5.28. Deformada del modelo 6A.*

Las máximas tensiones de Von Mises que se alcanzan tienen un valor de 490 MPa como se puede ver en la figura 5.29 y 5.30. Estas se alcanzan tanto en el encastre como en las zonas cercanas a la primera costilla.

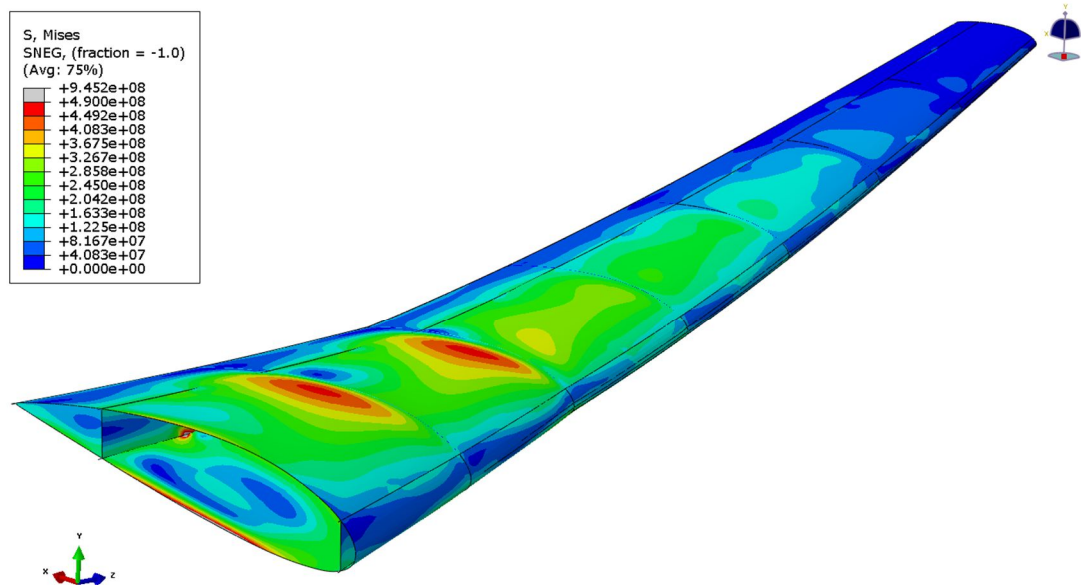


Figura 5.29. Distribución de tensiones de Von Misses en el modelo 6A.

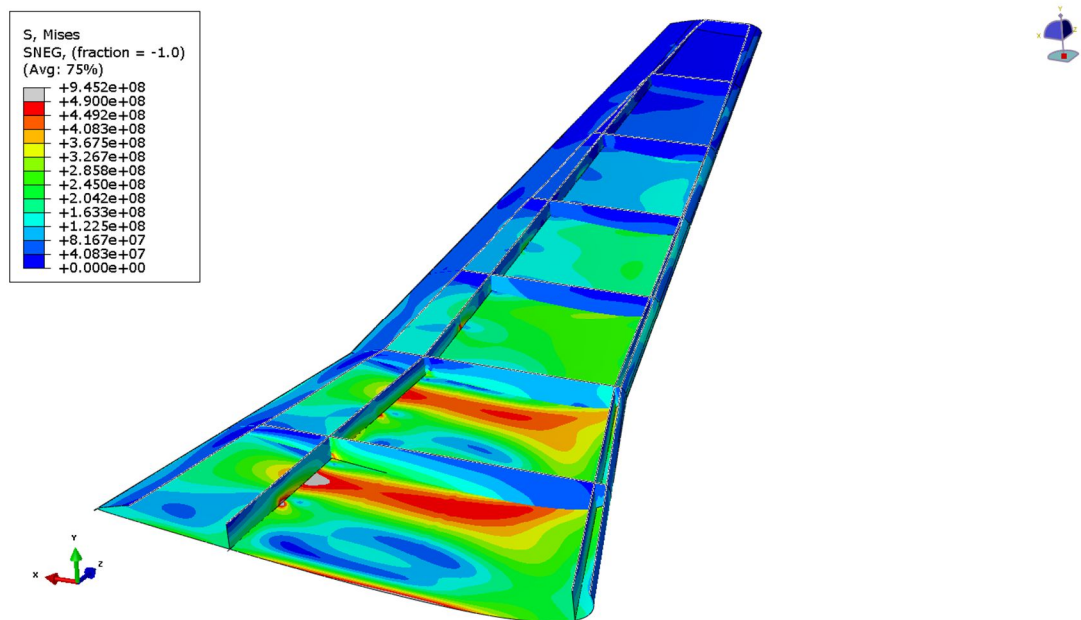


Figura 5.30. Corte horizontal del modelo 6A con la distribución de tensiones de Von Mises.

Para terminar con la exposición de resultados del modelo 6A se muestra en la figura 5.31 la distribución de las tensiones de cortadura en una vista de corte horizontal. Las máximas tensiones que se alcanzan son de 240 MPa.

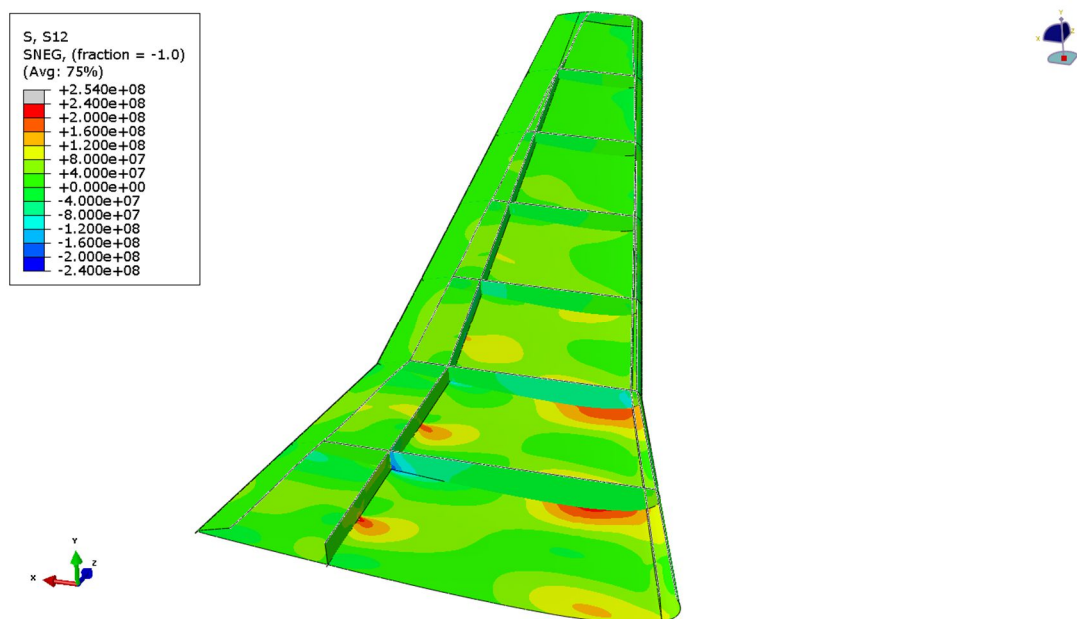


Figura 5.31. Corte horizontal del modelo 6A con la distribución de tensiones de cortadura.

Los valores que se obtuvieron para el modelo 6A indican que se encuentra dentro de los criterios de flecha como de tensiones máximas, aunque se ha podido ver que en la zona del encastre el valor de tensión máxima es de 490 MPa, justo el límite impuesto por nuestro material.

### Modelo 6B

En la figura 5.32 se puede ver, al igual que en los casos anteriores, una vista en perspectiva y en perfil de la deformada del modelo. En vista a lo obtenido se puede decir que la máxima flecha alcanzada ha sido de 2,053 m.

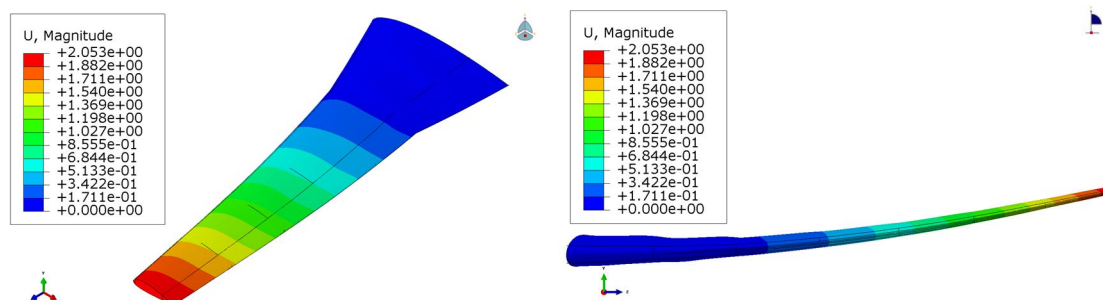


Figura 5.32. Deformada del modelo 6B.

A continuación se pueden ver las figuras 5.33 y 5.34 que muestran la distribución de tensiones de Von Mises. Las máximas que se han alcanzado han sido de 460 MPa en la zona del encastre y en las zonas próximas a la primera y segunda costilla.

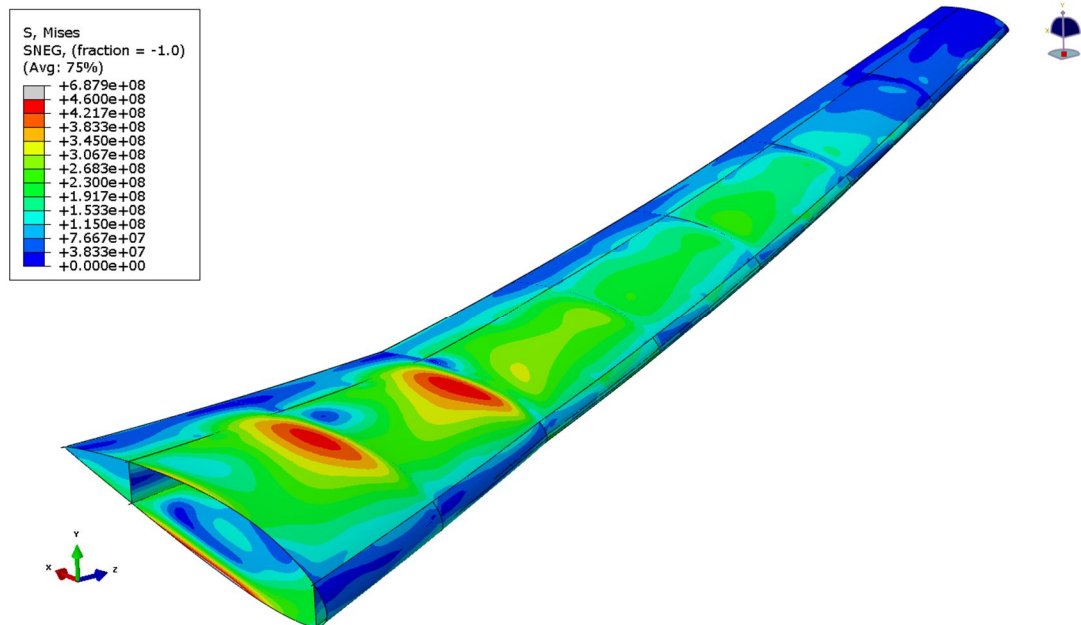


Figura 5.33. Distribución de tensiones de Von Mises en el modelo 6B.

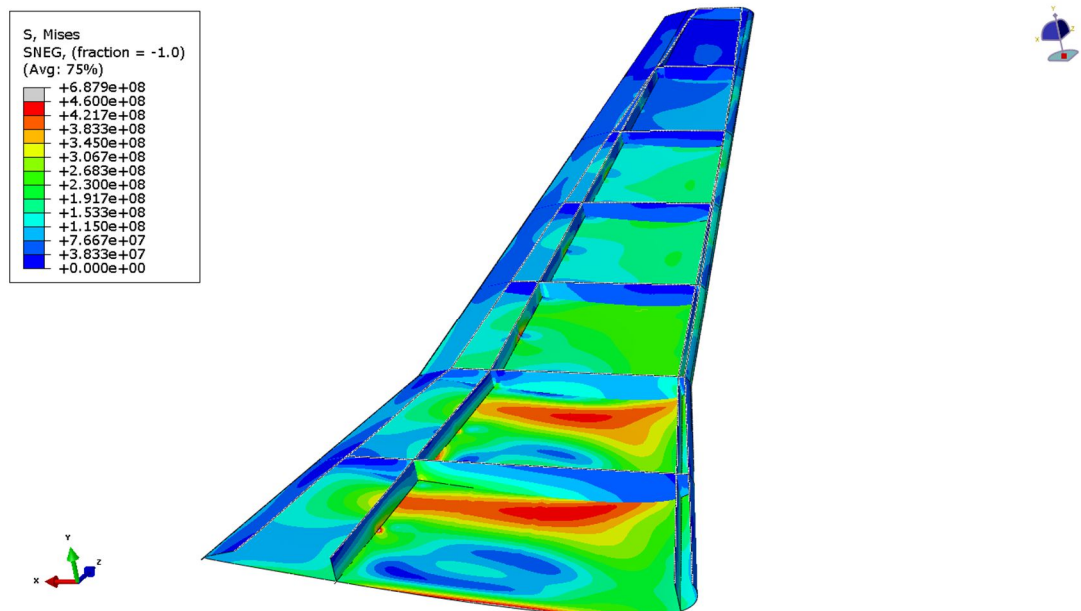


Figura 5.34. Corte horizontal del modelo 6B con la distribución de tensiones de Von Mises.

Por último se muestra en la figura 5.35 la distribución de tensiones de cortadura sobre una vista en corte horizontal del modelo. Las máximas tensiones que se alcanzan son de 190 MPa en la zona de unión entre la primera costilla y el intradós y de 166 MPa en la primera costilla.

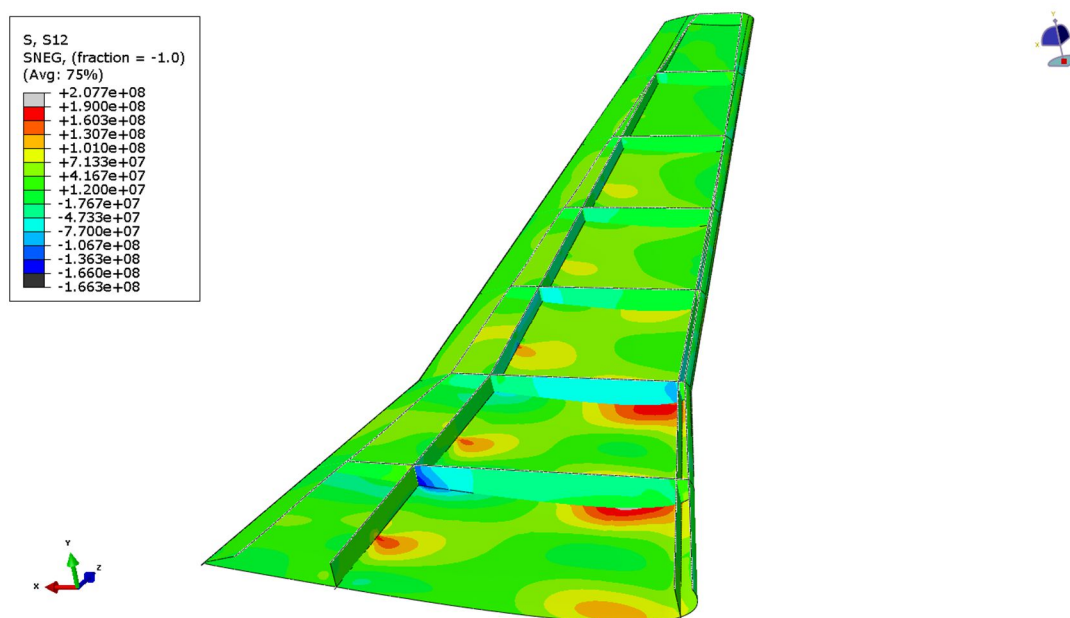


Figura 5.35. Corte horizontal del modelo 6B con la distribución de tensiones de cortadura.

### Discusión de resultados del modelo 6

Como se ve en la tabla 5.2 la principal conclusión que se saca es que la optimización de los espesores adaptándolos a lo largo de la longitud ha conseguido un efecto positivo, ya que se han visto reducidas las tensiones máximas a la vez que se ha conseguido una reducción del peso y la flecha máxima.

Otra conclusión que se puede ver es que las tensiones máximas se alcanzan en el encastre, como era de esperar, y en las zonas de unión como la de la costilla con el intradós. Esto se debe a que la unión son zonas angulosas que facilitan las concentraciones de tensiones, como puede verse en el hecho de que el modelo 6B presente la tensión de cortadura más alta en dicha zona.

|                  | FLECHA (m) | TENSIÓN V. MISES (MPa) | TENSIÓN $\tau$ (MPa) | PESO (Kg) |
|------------------|------------|------------------------|----------------------|-----------|
| <b>MODELO 6A</b> | 2,058      | 490                    | 240                  | 5175      |
| <b>MODELO 6B</b> | 2,053      | 460                    | 190 / 166            | 4939      |

Tabla 5.2. Datos del modelo 6.

### **5.3.3.- DISCUSIÓN DE RESULTADOS**

Con la realización del modelo 5 se pudo comprobar que dos geometrías idénticas y con una resultante de fuerzas sobre ellas iguales, los resultados que se obtuvieron fueron muy diferentes. Esto se debió a que el conjunto de fuerzas que actuaban en cada modelo no eran iguales. Esto lleva a la conclusión de que la forma en que actúan las diferentes fuerzas sobre un ala es fundamental conocerlas porque una simplificación de las mismas nos llevaría a resultados totalmente alejados de la realidad.

Entre el modelo 5B y 6B se pudo ver que una menor deformación global no implicaba unas tensiones más bajas. El modelo 5B tenía una deformación máxima de 1,024 mientras que el modelo 6B tenía una deformación del doble. En cambio el modelo 6B alcanzó unas tensiones menores con una reducción de peso del 75%. Esto se debió a que el modelo 6B estaba mejor optimizado.

Por último se pudo ver que una optimización de los espesores adecuándolos a las sollicitaciones concretas de cada parte del ala conseguía una mejora de peso a la vez que unas menores tensiones.

|                  | FLECHA (m) | TENSIÓN V. MISES (MPa) | TENSIÓN $\tau$ (MPa) | PESO (Kg) |
|------------------|------------|------------------------|----------------------|-----------|
| <b>MODELO 5A</b> | 0,42       | 375                    | 90                   | 8602      |
| <b>MODELO 5B</b> | 1,024      | 490                    | 220                  | 8602      |
| <b>MODELO 6A</b> | 2,058      | 490                    | 240                  | 5175      |
| <b>MODELO 6B</b> | 2,053      | 460                    | 190 / 166            | 4939      |

*Tabla 5.3. Datos de los modelos 5 y 6.*

## **6.- CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS**

En este apartado se exponen las conclusiones que se alcanzaron después de la realización de todos los cálculos y análisis de los diferentes modelos. Posteriormente se han expuesto diferentes propuestas de trabajo para continuar y completar el trabajo ya realizado.

### **6.1.- CONCLUSIONES**

A continuación se han comentado las conclusiones que se alcanzaron tras la realización del proyecto.

- El método de elementos finitos (MEF) se comprobó que era perfectamente válido para el análisis de las tensiones y deformaciones que se producen en una estructura como el ala de un avión. Los modelos 1, 2, 3 y 4 fueron los encargados de posibilitar la comparación entre el método analítico y el MEF. Dichos modelos se analizaron mediante ambos métodos comprobándose que las diferencias entre los resultados de ambos métodos no superaron el 10% en la mayoría de los casos, siendo un error perfectamente asumible.
- Se demostró que el software Abaqus es completamente adecuado para el análisis mediante MEF. Abaqus es un software muy potente con gran cantidad de herramientas que permitieron el análisis de todos los modelos sin presentar grandes dificultades en su diseño, cálculo y obtención de los resultados requeridos. Adicionalmente se comprobó que Abaqus dispone de la posibilidad de realizar análisis más complejos con la introducción de más variables y a su vez la obtención de muchos más datos que en este caso no fueron necesarios.
- Se pudo ver que el MEF obtuvo valores relacionados con las tensiones y deformaciones que el método analítico no fue capaz de obtener. Con el método analítico se obtuvieron los valores de tensiones y deformaciones máximas pero de una forma global, es decir, las peculiaridades no se obtuvieron. En cambio el MEF aportó mapas de la distribución de tensiones y deformaciones sobre todo el modelo. Esto permitió comprobar que en la realidad se producen concentración de tensiones y deformaciones debido al especial diseño del modelo con zonas angulosas, o a la forma de aplicar la carga de forma concentrada. Los valores de tensiones y deformaciones debido a estas peculiaridades se vio que eran mucho mayores que los obtenidos analíticamente.

- Se comprobó que el MEF, a través de Abaqus en este caso, puede presentar en ocasiones anomalías como fue el caso del modelo 4A. Esto demostró que a pesar de ser una herramienta muy potente el MEF, no se pueden dar por buenos los resultados obtenidos de una forma axiomática. Esto se debe a que el usuario puede cometer errores en el diseño del modelo a analizar, reportando posteriormente unos resultados erróneos. Debido a esto se debe tener siempre un control sobre lo que se analiza y los resultados que se obtienen, ya sea ,como en nuestro caso, con cálculos analíticos u otro método que se considere apropiado.
- Se vio gracias al análisis CFD que la distribución de presiones sobre la superficie de un ala es mucho más compleja de lo que en un principio se pudiera pensar. Se comprobó que ambas superficies de un ala (extradós e intradós) están sometidas a fuerzas de succión o empuje dependiendo del ángulo de ataque. De la misma manera la distribución de la presión y los valores de esta también están directamente relacionados con el ángulo de ataque. Por último, las fuerzas a las que está sometida el ala son mucho mayores que la resultante que se obtendría de la suma de ellas.
- Se pudo comprobar que el uso de elementos como las costillas aportaban al ala una mayor rigidez. Esto se tradujo en una disminución de peso de la mitad respecto a los modelos que no tenían costillas. Adicionalmente el uso de costillas también minimizo el efecto de la concentración de tensiones y sobre todo elimino casi por completo la concentración de deformaciones.
- Se concluyó que la optimización de los espesores en las diferentes partes del ala colocando los mayores espesores en las zonas mas solicitadas mecánicamente, contribuyó a una mejora de las solicitaciones internas de tensiones y deformaciones como a una reducción de peso. Esto se comprobó con los modelos B, donde el espesor no era constante en toda la sección y en el modelo 6B, donde adicionalmente se colocaron espesores menores según se alejaba del encastre.



## **6.2.- TRABAJOS FUTUROS**

En el siguiente punto se han comentado posibles líneas de trabajo futuras para continuar y aprovechar el trabajo ya realizado.

- Para contribuir con la idea de aligeramiento de un ala se podría estudiar el efecto de reducir el peso de las costillas mediante agujeros y que efecto provocaría este hecho en la estructura completa.
- En este proyecto se vio que el uso de las costillas tuvo un efecto muy beneficioso para la estructura. Otro elemento rigidizador que poseen las alas son los largueros, se podría estudiar el efecto del uso de estos elementos al igual que se hizo con las costillas.
- Este proyecto realizó un estudio estructural sobre un modelo de un ala real pero simplificada. Para continuar y aprovechar el trabajo realizado se podría completar el modelo añadiendo el efecto del peso propio así como el efecto de elementos que se encuentren en el ala como pueden ser los motores. A su vez se podría añadir más detalle geoméricamente hablando añadiendo elementos como alerones, flaps, spoilers, etc.
- En la introducción se comentó que en la actualidad se están usando materiales como la fibra de carbono o materiales compuestos para la fabricación de aviones. Se podría estudiar que efecto y mejoras que se podrían conseguir con estos materiales respecto a materiales más clásicos como el aluminio, ya que el software Abaqus permite incluir estos materiales de una forma sencilla.
- Previamente se ha comentado que el software Abaqus es una herramienta de cálculo muy potente con un gran abanico de posibilidades. Para aprovechar este software y sacarle el máximo rendimiento posible se podría realizar un estudio del efecto de la aparición de grietas y el comportamiento de estas sobre la estructura, ya que a pesar de lo que la cultura popular pueda pensar, un avión está diseñado para que pueda funcionar sin riesgo estructural con grietas de hasta 2 m.
- La última línea de trabajo que se propone es aprovechar y maximizar las posibilidades computacionales que hoy en día permiten los ordenadores. Para ello se propone realizar un estudio combinado estructural-CFD, es decir, estudiar el efecto fluido-dinámico sobre la estructura del ala de una simultánea en la que el aire interaccione con la superficie del ala y viceversa. Hoy en día esto ya es posible, sin ir más lejos Abaqus permite usar software específico de CFD como StarCCM+ para realizar cálculos simultáneos.

## **7.- REFERENCIAS**

- T.H.G. MEGSON. Aircraft Structures for Engineering Students. Butterworth-Heinemann, Oxford 2007.
- STEPHEN WOOLFORD Y CARL WARNER. History of flights. Carlton Books Limited, London 2009.
- JOHN H. MORROW JR. The Great War in the Air. The University of Alabama Press, Tuscaloosa 1993.
- Manual del Airbus A320. AIRBUS S.A.S. Aircraft characteristics airport and maintenance planning. Francia 2012.
- Master's Thesis, Lulea University of Technology. FAHAD AMAN KHAN. Preliminary Aerodynamic Investigation of Box-Wing Configurations using Low Fidelity Codes. 2010.
- CERVERA RUIZ, M. Y BLANCO DIAZ, E. Resistencia de materiales. Edicions UPC, Barcelona 2001.
- GARRIDO GARCÍA, J.A. Y FOCES MEDIAVILLA, A. Resistencia de materiales. Universidad de Valladolid, Valladolid 1994.
- ORTIZ BERROCAL, L. Elasticidad. McGraw-Hill, Madrid 1998.
- SAMARTIN QUIROGA, A. Elasticidad. Bellisco, Madrid 1990.
- Manual de usuarios de ABAQUS. Abaqus 6.12 Documentation. 2012.
- Página web oficial de la NASA. [WWW.NASA.GOV](http://WWW.NASA.GOV) (Consultada en Noviembre 2014)
- Página web oficial de Airbus. [WWW.AIRBUS.COM](http://WWW.AIRBUS.COM) (Consultada en Noviembre 2014)
- Página web de base de datos online de materiales. [WWW.MATWEB.COM](http://WWW.MATWEB.COM) (Consultada en Noviembre 2014)